## 【2021 全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

高中（職）組成果報告表單

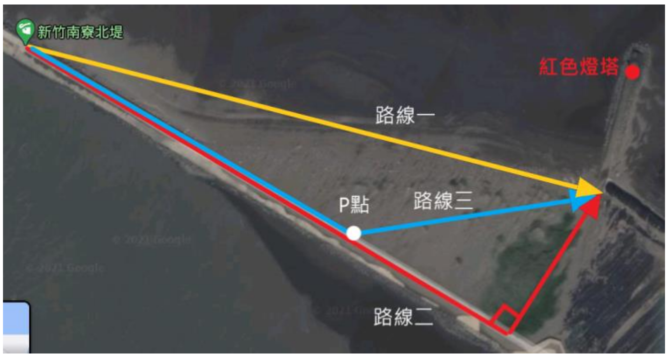
**題目名稱：** **最短距離卻不一定最快！？何不順「速」而行！**

**一、摘要：**


生活中，兩點之間走直線距離是否最快？當不同的路徑考量到不同的速率之時，或許會有一些有趣的結果發現。我們透過手邊工具建立模型推演及實地走訪現場勘察地形量測，比較兩點之間走「最短路徑」、「L 型路徑」及「折線路徑」理論與實測的結果，並對其差異進行分析討論。


**二、探究題目與動機**

美好的假期不禁讓人想來趟知性之旅，於是我和同學們來到新竹的南寮漁港，在那裡不僅可以觀賞海天一線的美景，也可以在風箏公園放放風箏，體會風城之名的由來。我們先在「新竹南寮北堤」處看海、觀浪，計畫徒步走到右上方的「紅色燈塔」處看船，如圖一所示，眼前大致有兩條路線可以選擇：



圖一：各條路線選擇（利用 Google Map 衛星地圖自製）

路線一（黃線）：直接朝紅色燈塔最近之處筆直走去，全程走沙路。

路線二（紅線）：先沿著水泥道路走至紅色燈塔在水泥道路上的垂足點，再左轉 $90^\circ$ 走最短的沙路直至燈塔處。

依照常理，兩點之間以直線距離最短，「路線一」明顯筆直且單純，但全程走沙路步行的速度較慢。而「路線二」走 L 型雖繞較遠，但在水泥道路上步行的速度比沙路快很多，且後半段左轉彎之後即可走最短的沙路路徑直接通往燈塔。這時我們的問題來了：

**「從新竹南寮北堤走到紅色燈塔，上述兩條路線哪一條走起來會比較快呢？」 (問題一)**

就在我們猶豫不決之際，一位同學天外飛來一筆：

「各位各位，如果我們**水泥道路距離不要走這麼長，在途中某個點($P$ 點)就轉向燈塔筆直走去，會不會更快抵達燈塔呢？**」（如圖一中的路線三(藍線)） **(問題二)**

大家開始議論紛紛。三條路線當中，究竟要走哪條路線才能最快到達目的地呢？

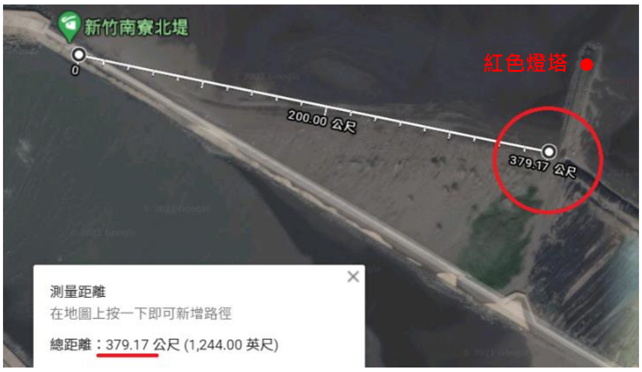
**三、探究目的與假設**

1. 針對兩點之間「最短路徑」、「L 型路徑」及「折線路徑」建立數學模型推算結果，並應用光學原理來解決問題。
2. 實地走訪現場，測量兩點之間「最短路徑」、「L 型路徑」及「折線路徑」步行所花費的平均時間。

3. 整理模型推算數據與當地實測的結果，前後比較並對其誤差進行分析。
4. 探討最短時程路徑及生活應用的延伸。

## 四、探究方法與驗證步驟

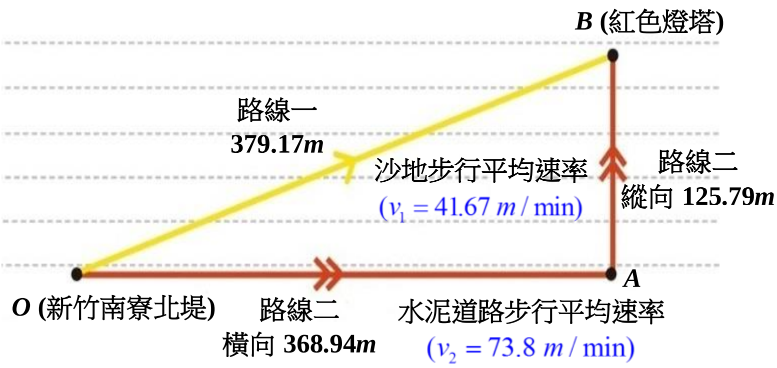
我們先來解決**(問題一)**。如下圖二所示，利用 Google Map 量測距離，從新竹南寮北堤開始，筆直至紅色燈塔最近之處，這段最短路徑總長約為 379.17 公尺。同樣的起點，若先沿著水泥道路至紅色燈塔在水泥道路上的垂足點，這段橫向距離約為 368.94 公尺。下圖三顯示，路線二(L 型)的總長度約為 494.73 公尺，因此可計算出紅色燈塔到水泥道路的最近距離，這段縱向沙地路有 $494.73-368.94=125.79$ 公尺。




圖二：新竹南寮北堤至距離紅色燈塔最近之處，長度約為 379.17 公尺


圖三：路線二的(L 型)總長度約為 494.73 公尺

根據中央警察大學〈路口行人步行速率資料庫建立之研究〉及網路新聞〈每日頭條─沙漠徒步，從行前準備到穿越技巧，必備常識都在這〉顯示，一般人在沙地行走的平均分速約為 41.67 公尺(設為 $v_1$)，而在水泥道路行走的平均分速約為 73.8 公尺(設為 $v_2$)。利用畢氏定理及速率公式，可計算出兩條路線所花費的時間如下：




圖四：各段距離與速率示意圖

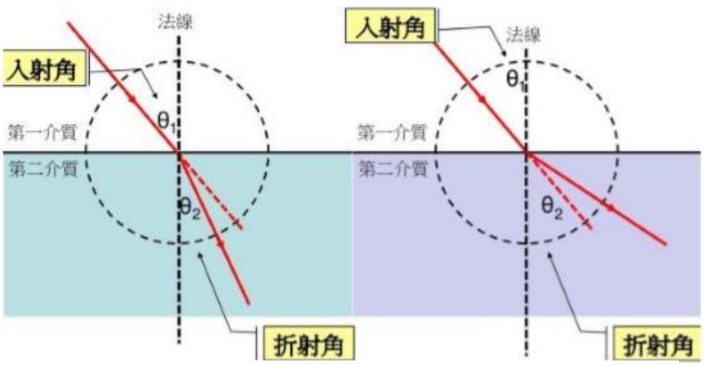
路線一：$\dfrac{\overline{OB}}{v_1}=\dfrac{379.17}{41.67}\approx 9.0994$ 分鐘 $\approx$ 9 分 06 秒

路線二：$\dfrac{\overline{OA}}{v_2}+\dfrac{\overline{AB}}{v_1}=\dfrac{368.94}{73.8}+\dfrac{125.79}{41.67}\approx 4.9992+3.0187=8.0179$ 分鐘 $\approx$ 8 分 01 秒

從此結果來看，我們發現，「路線一」雖是最短的路徑，但是花費的時間卻比「路線二」大約多了 1 分鐘，這也讓我們更好奇**(問題二)**的答案是什麼？是否還有花費時間更短的路徑呢？欲解決這個問題，或許我們可以利用光學原理中的「司乃爾定律」。17 世紀荷蘭的科學家司乃爾發現了光在兩種不同介質的行經速率與其角度關係為

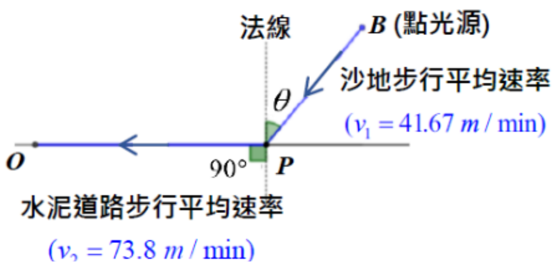
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

其中，$\theta_1$為入射角，$\theta_2$為折射角，$v_1$和$v_2$分別為光在第一介質和第二介質的行經速率，如圖五所示。亦即，光的入射角$\theta_1$和折射角$\theta_2$的正弦值之比值等於其在兩介質中的速率比值。而不久之後，費馬也證明了此路線即為光行進時的最短時程。




圖五：光的折射 (資料來源：北市重慶創客基地)

假設一般人在沙地上行走的平均速率為$v_1$，在水泥道路上行走的平均速率為$v_2$，如圖六，我們可想像$B$點為一個點光源，向水泥道路上的一點$P$射出一道光，由於行進在沙地和水泥道路上的速率不同，因此光線在經過$P$點後會產生折射現象。我們希望光線經折射後會沿著道路射向$O$點，即折射角為$90°$，並令入射角為$\theta$，則，由司乃爾定律知




圖六：光從$B$點射向$P$點且折射角為$90°$

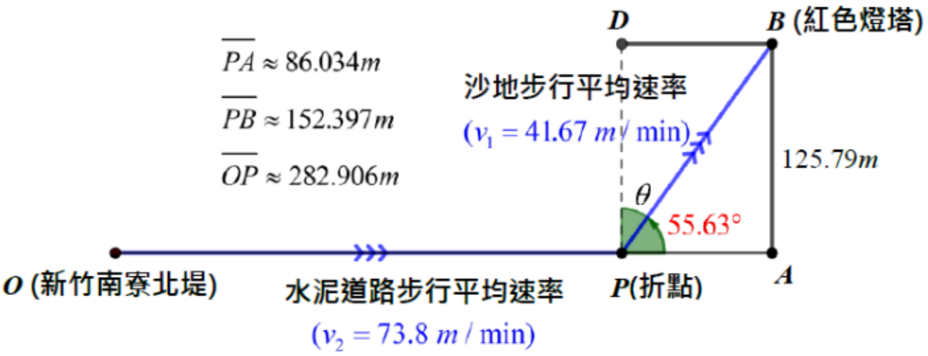
$$\frac{\sin\theta}{\sin 90°} = \sin\theta = \frac{v_1}{v_2}$$

透過上述的關係式，我們可以推導出$P$點的確切位置，得出最短時程的路徑。

設「新竹南寮北堤」為原點$O$，「紅色燈塔」為$B$點，根據司乃爾定律，在折射角為$90°$時，我們有

$$\sin\theta = \frac{v_1}{v_2} = \frac{41.67}{73.8} \approx 0.5646$$

利用計算機，可求得$\theta \approx 34.37^o$。即，從$O$點出發一直直走，到行進方向與$B$點夾$90° - 34.37°$ $= 55.63°$的位置時，即為所求的折點$P$，如圖七所示。




圖七：各地距離與夾角示意圖

此時$\overline{PA} = \overline{AB}\tan\theta = 125.79 \cdot \tan 34.37° \approx 86.034$公尺，

$\overline{PB} = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{86.034^2 + 125.79^2} \approx 152.397$公尺。

換句話說，當我們從新竹南寮北堤出發，先沿著道路直走 $368.94-86.034=282.906$ 公尺，再左轉 $55.63°$ 改走沙地 152.397 公尺直至紅色燈塔，這條新的路線可以最省時間，也就是我們先前提到的「路線三」。估計「路線三」所花費的時間為：

$$\frac{\overline{OP}}{v_2}+\frac{\overline{PB}}{v_1}=\frac{282.906}{73.8}+\frac{152.397}{41.67}\approx 3.8334+3.6572=7.4906 \text{ 分鐘} \approx \text{7 分 29 秒}$$

顯然，「路線三」所花費的時間比先前兩條路線都還來得少。

參考模型推算出來的理論數據，我們實地來到新竹南寮漁港對這三條路線進行實驗測試，其中，我們的 3 位組員分別實測的結果如下表：

表一：3 位組員於新竹南寮漁港針對三條不同路線實測的結果

| | 路線一(最短路徑) | 路線二(L 型路徑) | | 路線三(折線路徑) | |
|---|---|---|---|---|---|
| 行走距離 | (全程沙地) 379.17 公尺 | (水泥路段) 368.94 公尺 | (沙地路段) 125.79 公尺 | (水泥路段) 282.906 公尺 | (沙地路段) 152.397 公尺 |
| 亞愛的時間 | 5 分 20 秒 | 3 分 44 秒 | 2 分 09 秒 | 2 分 06 秒 | 3 分 11 秒 |
| 定宏的時間 | 5 分 29 秒 | 3 分 20 秒 | 1 分 54 秒 | 2 分 01 秒 | 3 分 01 秒 |
| 紘嘉的時間 | 5 分 33 秒 | 3 分 48 秒 | 1 分 57 秒 | 1 分 45 秒 | 2 分 56 秒 |
| 平均花費的時間 | 5 分 27 秒 | 3 分 37 秒 | 2 分 00 秒 | 1 分 57 秒 | 3 分 03 秒 |
| 亞愛的速率 | 71.09 | 98.82 | 58.51 | 134.72 | 47.87 |
| 定宏的速率 | 69.15 | 110.68 | 66.21 | 140.28 | 50.52 |
| 紘嘉的速率 | 68.32 | 97.09 | 64.51 | 161.66 | 51.95 |
| 平均速率 $(m/\min)$ | 69.52 | 102.20 | 63.08 | 145.55 | 50.11 |

我們取三人平均花費的時間及速率做為實測的結果，與先前的模型推算數據一起做整理比較，得出我們的結論。

## 五、結論與生活應用

我們將上述三條路線實測的結果與先前的模型推算數據整理如下：

表二：三條不同路線模型推算與實測總花費時間結果比較

| | 路線一(最短路徑) | 路線二(L 型路徑) | 路線三(折線路徑) |
|---|---|---|---|
| 行走距離總長 | 379.17 公尺 | 494.73 公尺 | 408.303 公尺 |
| 總花費時間(模型推算) | 9 分 06 秒 | 8 分 01 秒 | 7 分 29 秒 |
| 總花費時間(實測平均) | 5 分 27 秒 | 5 分 37 秒 | 5 分 00 秒 |

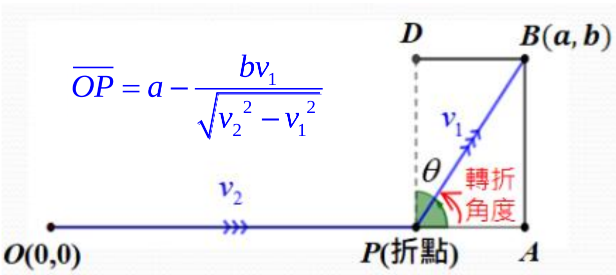
比較後可知，利用司乃爾定律規劃出來的「路線三」總花費的時間最少，而且實際應用之下確實能夠最快到達目的地。因此當不同的路徑考量到不同的速率之時，整體所花費的時間，我們

無法單從距離長短之面相判斷。

從(表二)中得知，理論上，「路線一」(最短路徑但全程沙地)走起來最為費時，比起最快的「路線三」，兩者差約 1 分半左右的時間；然而實測的結果並非如此，反而是「路線二」(L 型路徑) 走起來最為費時，比起最快的「路線三」，兩者差約半分鐘左右的時間。針對這樣結果的差異性，我們作進一步的分析：

1. 由(表一)下半部分中可知，我們在水泥道路與沙地上行走的實際速率均比文獻上所提供的速率還要來得快，可能是因為我們三位學生屬於步伐偏快的年輕族群(且實測樣本數較少)，而文獻上所提供的速率是全體受測者的平均速率，因此我們實測的總花費時間均比理論平均值還要來得少。
2. 三位組員雖在兩種不同介質上行走的速率快慢不一，但是每次同一人行走在同一種介質上的速率並不會有太大的差異，我們取三人最後的平均作為實測的結果。參考文獻資料，行走在沙地與水泥道路的速率比值應為 0.5646，然而實測的平均速率比值為 0.6802，因為實測中不同路徑的介質速率差並沒有理論中來得大，所以才會有機會造成「路線一」(最短路徑)的實測結果比「路線二」(L 型路徑)來得較快。
3. Google Map 在小範圍估計距離上有誤差。(表一)實測中可知，「路線三」水泥路段的平均速率比「路線二」水泥路段的平均速率快了約 $43\,m/\min$，反而是「路線三」沙地的平均速率比「路線二」沙地的平均速率慢了約 $13\,m/\min$，因此我們推測，實際現場「路線二」（L 型路徑）的水泥路段長度比 Google Map 測量出來的結果還要來的短，而沙地路段比 Google Map 測量出來的結果還要來的長，這些差異也增加了「路線二」實測出來所花費的時間。
4. 其它可能原因(地形、氣候、地面濕度、步行工具或個人體力等)所產生的誤差。例如從實測影片中可看到，「路線一」雖為全程走沙路屬步行速率較慢的路線，但地形上相對來說平坦了許多，反而另兩條路線的沙地部份實際走起來需要越過不少的小沙丘，使得實際行走路徑總長略增加了一些，且另兩條路線水泥路段與沙地路段銜接部分的坡度差或行走過程中是否吹來陣陣的海風等，也都會增加一點我們實際行走時所花費的時間。

如圖八，我們將類似這種「走折線問題」以坐標平面一般化。假設起始點位置為 $O(0,0)$，終點位置為 $B(a,b)$，走在較慢道路上時的速率為 $v_1$，走在較快道路上時的速率為 $v_2$，則從起始點開始，先選擇走較快的道路 $a-\dfrac{bv_1}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}$ 的距離後，再轉往終點的方向走去，則整段路程所花費的時間會為最少。

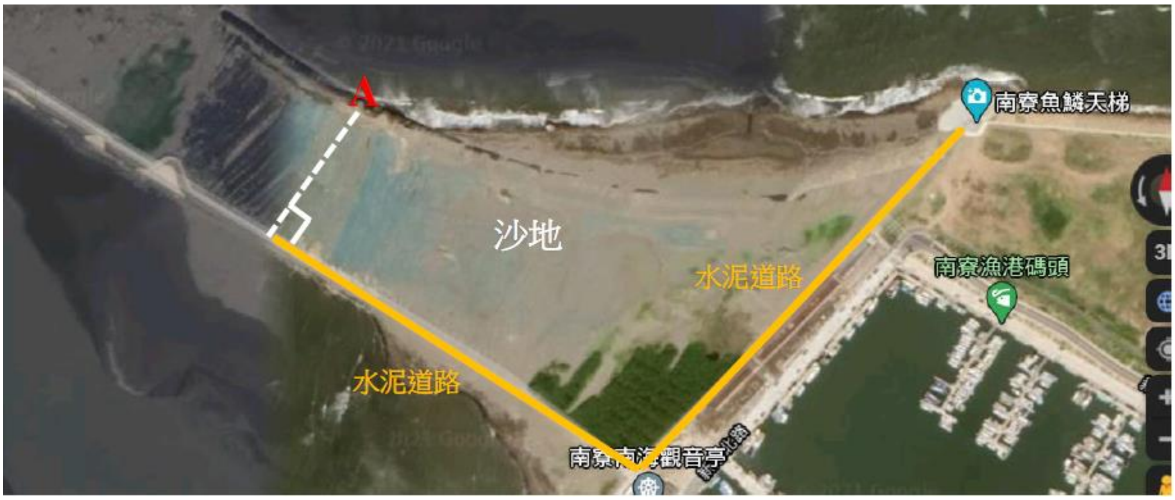


圖八：最短時程路徑折點 $P$ 的確切位置

另一方面，轉折點所在的位置和兩種道路的速率比有很大的關係。當速率差愈大時，行走在較快道路上的距離相較來說就會長一些，意即從轉折點切往終點的角度將會愈接近終點到較快道路的垂足點(即轉向角度愈接近90°)。相對的，當速率差愈小時，轉折點的位置就會愈靠近起點，使整條路線總長愈接近走最短的路徑。例如，我們在實測中，行走在沙地與水泥道路的平均速率比值為 0.6802(理論值為 0.5646)，所以下次再有同一個情境的話，我們應該要於稍早一點的路段作轉折(轉折角約為52.54°)，則可以省下更多的時間。

這次我們研究的主題是生活中常會遇到的最速路線選擇的問題。例如連假高速公路的車潮造成回堵時，這時應要跟著塞在車陣中還是先改走一段省道再上高速公路？又例如，當一位泳客在長方形的泳池中溺水而飄盪不定，這時泳池岸上的救生員，該以什麼路線過去才能最快救到溺水者？我們很高興能運用所學來解決生活中常見的這類問題。

未來，我們希望能夠將直線道路的最短時程問題做進一步的延伸。例如，在圖九的情境中，L 型的黃色路段為水泥道路，其與海浪之間的部分均為沙地，我們欲從「南寮魚鱗天梯」到地圖中 A 處的位置玩水，那麼，我們要如何善用行走速率較快的路段才能最快到達 A 處呢？




圖九：南寮魚鱗天梯與周遭道路沙灘地形一覽(利用 Google Map 衛星地圖自製)

在生活中，我們眼見的最短路徑不一定最快，而人生中，有時預想的最快成功路徑也未必能夠順遂。透過這次的研究探討，讓我們了解到，人生，或許順勢(速)而行，適當地調整自己的步伐，坦然接受環境、境遇所帶給我們的一切，才是通往成功的真正捷徑。

**參考資料**

1. 張小川(2020 年三月)。一類最小值問題的通法通解。數學傳播 44 卷 1 期 p.97-101。
2. 陳界山(主編)(2019)。普通型高級中等學校數學(一)課本。南一書局企業股份有限公司。
3. Wang(2017 年 10 月 14 日)。光的反射與折射。北市重慶創客。
4. 每日頭條(2016 年 4 月 29 日)。沙漠徒步，從行前準備到穿越技巧，必備常識都在這。
5. 中央警察大學(2009 年 9 月)。路口行人步行速率資料庫建立之研究。