

【2021 全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

國中組成果報告表單

題目名稱：我家有個後花園

一、摘要：

規則：

1. 分先手跟後手，輪流在方格的邊(也就是圍牆)畫線，每次只能畫一條，且同一條邊不可重複畫記。
2. 有塗色的土地稱為花園，花園的四邊都不可畫記。
3. 當某方將土地的最後一條邊緣畫記時，則該方獲得此塊土地。

勝負條件：

當每一條邊都被畫記時，土地數較多的一方獲勝

二、探究題目與動機

我們在找題目時，看到學長姐們以前的研究主題是"天下圍攻"。其中在"延伸探究"當中看到有一個項目是"添加花園"。於是在好奇心的驅使下，決定來研究有花園的狀況下，局勢會如何?也當作是完成學長姐的延伸探究。

三、探究目的與假設

在雙方都會玩(沒有失誤)的前提下，同一個圖形通常都是固定某方贏，猜測是否存在某個原因決定輸贏？

我們的假設是:如果邊長(圍牆數)為奇數，則先手贏。

如果邊長(圍牆數)為偶數，則後手贏。

四、探究方法與驗證步驟

在此只討論 $n \times n$ 的圖形

(一) 1×1



無庸置疑，後手贏

4邊

(二) 2×2

(1) 1 個花園

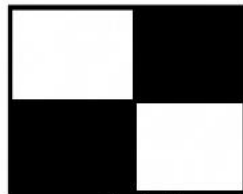


無論怎麼下，都是後手贏

影響到兩格

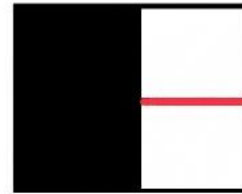
$$12-4=8$$

(2) 2 個花園



影響到2格
 $12-8=4$

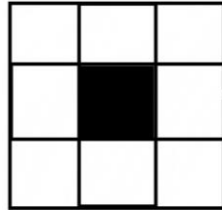
後手贏



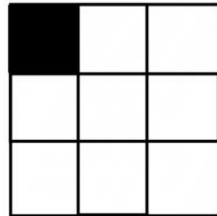
$12-7=5$
 先手下紅色必贏

(三) 3x3

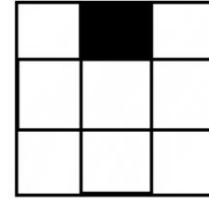
(1) 1 個花園



影響到4格
 $24-4=20$ (圍牆)
 後手贏

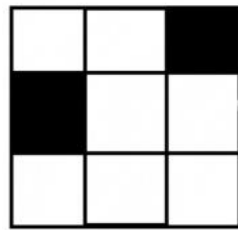


影響到周圍兩格
 $24-4=20$ (圍牆)
 後手贏



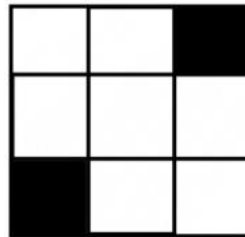
影響到3格
 $24-4=20$ (圍牆)
 後手贏

(2) 2 個花園



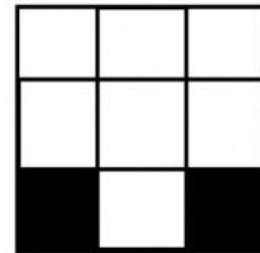
影響到5格
 $24-8=16$

後手贏



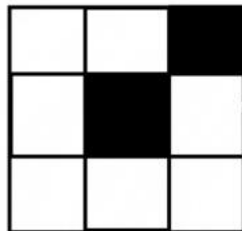
影響到5格
 $24-8=16$

後手贏



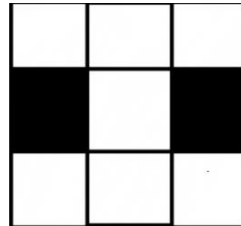
影響到3格
 $24-8=16$

後手贏



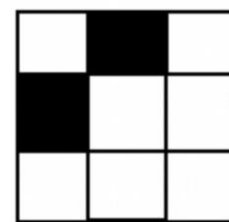
影響到4格
 $24-8=16$

後手贏



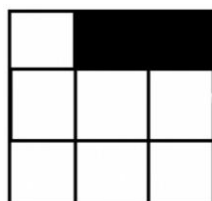
$24-8=16$
 影響到5格

後手贏

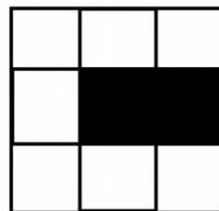


$24-8=16$
 會影響到4格

後手贏



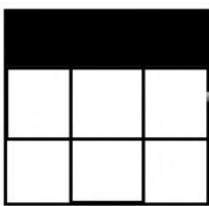
$24-7=17$
 會影響到3格
 先手贏



$24-7=17$
 會影響到5格
 先手贏

(3) 3 個花園: 以編號來表示位置, 圖形底下顯示的是經旋轉或翻轉後會相同的圖形

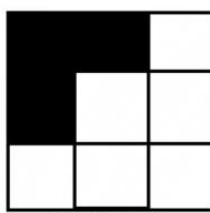
1	2	3
4	5	6
7	8	9



同: (1、4、7)
(3、6、9) (7、8、9)

3格 14條

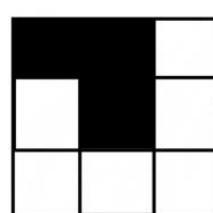
後手贏



同: (2、3、6)
(4、7、8) (6、8、9)

3格 14條

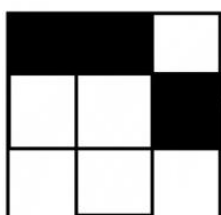
後手贏



同: (3、5、6)
(4、5、7) (5、8、9)

4格 14條

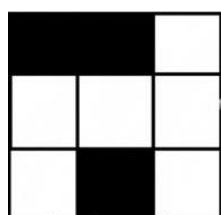
後手贏



同: (2、4、7)
(3、6、8) (4、8、9)
(1、4、8) (2、3、5)
(2、6、9) (6、7、8)

4格 13條

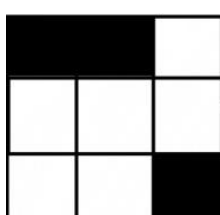
先手贏



同: (2、8、9)
(3、4、) (4、6、7)

5格 13條

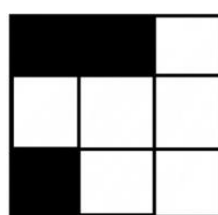
先手贏



同: (1、8、9)
(3、4、7) (3、6、7)
(1、4、9) (1、6、9)
(2、3、7) (3、7、8)

5格 13條

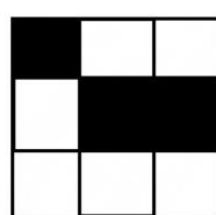
先手贏



同: (1、3、6)
(3、8、9) (4、7、9)
(1、3、4) (1、7、8)
(2、3、9) (6、7、9)

4格 13

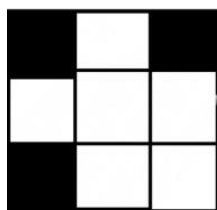
先手贏



同: (2、5、7)
(3、5、8) (4、5、9)
(1、5、8) (2、5、9)
(3、4、5) (5、6、7)

5格 13條

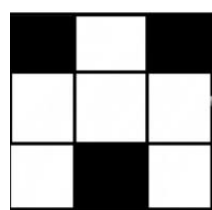
先手贏



同: (1、3、9)
(1、7、9) (3、7、9)

4格 12條

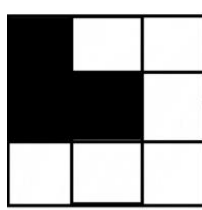
後手贏



同: (1、6、7)
(2、7、9) (3、4、9)

6格 12條

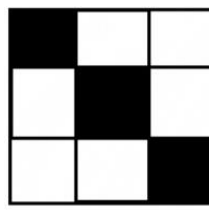
後手贏



同: (2、3、5)
(5、6、9) (5、7、8)

4格 14條

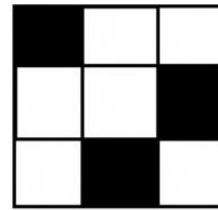
後手贏



同: (3、5、7)

4個 12條

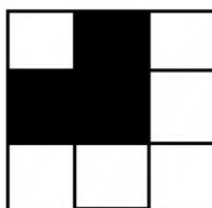
後手贏



同: (2、4、9)
(2、6、7) (3、4、8)

6格 12條

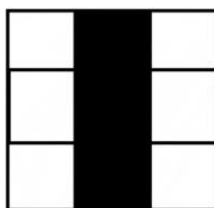
後手贏



同: (2、5、6)
(4、5、8) (5、6、8)

5格 14條

後手贏



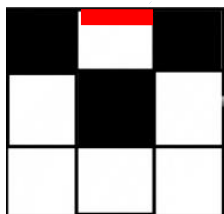
同: (4、5、6)

6格 14條

後手贏

我們發現, 花園影響到的格子數量並非是導致輸贏的主因, 剩下的邊數才會決定輸贏。

★值得一提的是

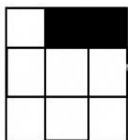


同：(1、5、7)
(3、5、9) (5、7、9)

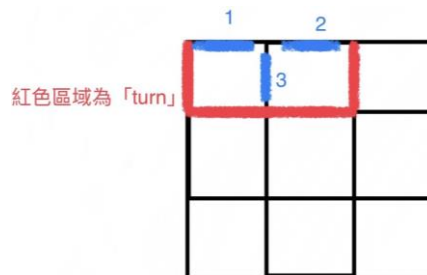
4格 12條

先手搶佔紅色粗線位置，可搶平手機會，但仍無法逆轉勝(最多只能凹到平手)。

五、結論與生活應用

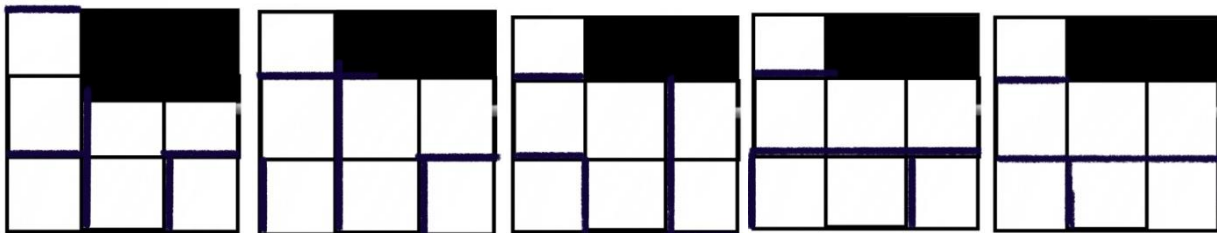


以 為例，我們以「turn」的數量分層討論

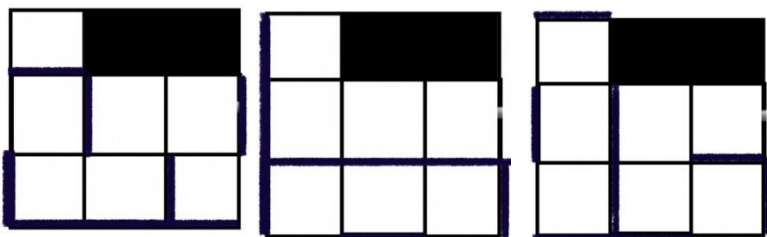


Turn:偶數格但留下奇數邊的情況，此情況可扭轉局勢。

(1)一個 turn:

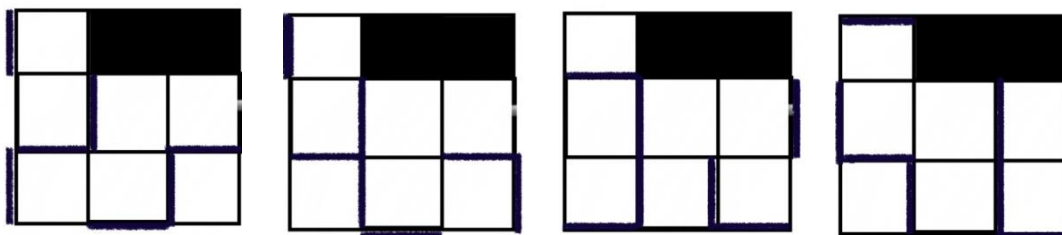


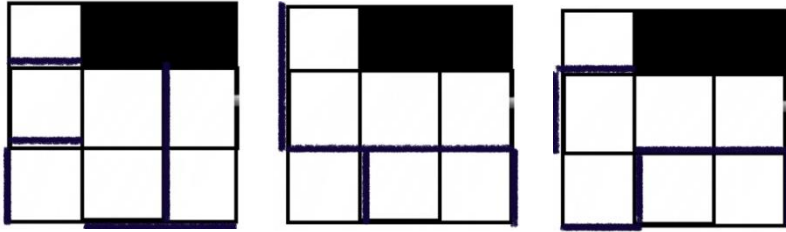
$24 - 7 - 6 = 11$ ，輪先手下，可由 turn 轉換變成後手先下，先手贏



$24 - 7 - 8 = 9$ ，輪先手下，可由 turn 轉換變成後手先下，先手贏

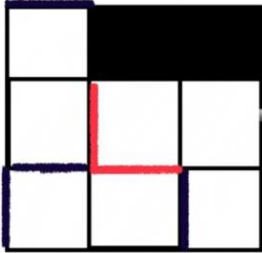
(2)兩個 turn:





24 - 7 - 7 = 10，輪後手下，但有兩個 turn 轉換，依舊是後手先下，先手贏

(3) 三個 turn:



紅色處有矛盾，因此3個turn不存在

原邊數 - 花園邊數 = 奇數 先手贏

原邊數 - 花園邊數 = 偶數 後手贏

參考資料

109 年宜蘭縣科展，中華國中參展作品「圍我獨尊」