【2021 全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

高中（職）組成果報告表單

題目名稱：

一、摘要：

本研究中透過實際的滾動正多面體骰子，來觀察結果，進而發現能夠利用同餘的原理來縮小需要研究的範圍，接著研究其滾動數圈及形式具有規律性變化的所有棋盤上之點數的變化，並且求出正多面體在各自棋盤上滾動的所有通解。

二、探究題目與動機

在某次數學競賽中，我們看到一個有趣的題目（永春高中數學科教學研究會，2019）。一顆標準骰子的任一面與其對面的點數和都是 7，現將一顆骰子以1點朝上、2 點朝前的方式置於平面上一個5×7棋盤格的一角，接著以骰子的稜線為旋轉軸，依箭頭指示沿逆時針方向滾動骰子，如圖 1 所示。當骰子沿棋盤滾動一圈回到初始位置時，其朝上那面的點數為何？

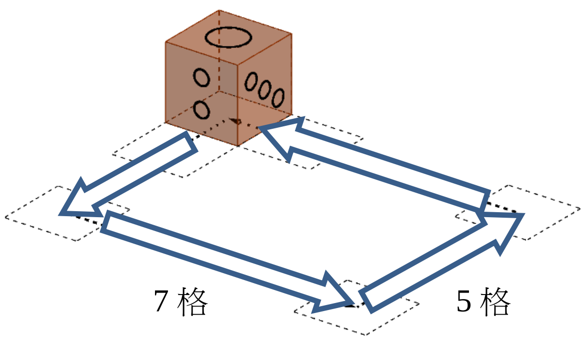

圖 1：骰子的點數配置與旋轉方向（來源：研究者繪製）

上面的5×7棋盤當然可以換成其他的數字。初步嘗試後，我們發現這跟棋盤邊長除以 4 的餘數有點關係，因此又去查詢「同餘」的表示法，用來表示餘數（許介彥，2008；維基百科，2020）。除此之外，我們想到正多面體共有 5 種，如果把骰子換成其他 4 種正多面體，把棋盤每一格的形狀換成正多面體的每個面，並且多滾幾圈，結果又是如何呢？這就是本研究主要的目標。

三、探究目的與假設

1. 正六面體骰子在$m\times n$方格棋盤上滾動 k 圈的情形。
2. 正四面體骰子在n階三角棋盤上滾動 k 圈的情形。
3. 正八面體骰子在n階三角棋盤上滾動 k 圈的情形。
4. 正二十面體骰子在n階三角棋盤上滾動 k 圈的情形。
5. 正十二面體骰子在五邊形棋盤上滾動 k 圈的情形。

四、探究方法與驗證步驟

名詞定義

（一）初始位置：骰子一開始所在的位置，同時也是滾動後最終所停止的位置。

（二）n階三角棋盤：邊長為n、由正三角形構成的棋盤，如圖2所示。這是正四面體、正八面體、正二十面體骰子滾動時所使用的棋盤。（既然每個格子都是正三角形，棋盤又含有三個邊，則棋盤的形狀必為正三角形，不可能是其他形狀。）

（三）$\mathrm{m}\times\mathrm{n}$方格棋盤：正六面體骰子滾動時所使用的棋盤。由於$\mathrm{m}\times\mathrm{n}$與$\mathrm{n}\times\mathrm{m}$棋盤的情況有所不同，我們定義骰子開始滾動的那邊是m，第二邊是n。

（四）五邊形棋盤：供正十二面體骰子滾動時所使用的棋盤。由於正常排列只有一種可能結果，所以目前只有單一圖形。

（五）函數$f_4(n,k)$：將正四面體骰子以1點朝下、2點朝前（骰子滾動的方向稱為前方）的方式，置於n階三角棋盤的初始位置，順時針滾動k圈並回到初始位置時，其朝下那面的點數。

（六）函數$f_6(m,n,k)$：將正六面體骰子以1點朝上、2點朝前（骰子滾動的方向稱為前方）的方式，置於$\mathrm{m}\times\mathrm{n}$方格棋盤的初始位置，逆時針滾動k圈並回到初始位置時，其朝上那面的點數。

（七）函數$f_8(n,k)$：將正八面體骰子以1點朝上、2點朝前（骰子滾動的方向稱為前方）的方式，置於n階三角棋盤的初始位置，順時針滾動k圈並回到初始位置時，其朝上那面的點數。

（八）函數$f_{12}(k)$：將正十二面體骰子以1點朝上、2點朝前（骰子滾動的方向稱為前方）的方式，置於五邊形棋盤的初始位置，順時針滾動k圈並回到初始位置時，其朝上那面的點數。

（九）函數$f_{20}(n,k)$：將正二十面體骰子以點1朝上、2點朝前（骰子滾動的方向稱為前方）的方式，置於n階三角棋盤的初始位置，順時針滾動k圈並回到初始位置時，其朝上那面的點數。

探討正四面體骰子在n階方格棋盤上滾動k圈的情形

正四面體骰子在任何邊長的三角棋盤中，不論滾幾圈，它的朝下點數都是1。這是因為骰子滾到棋盤的三個角落時，必須分別轉換一次滾動的方向；又觀察棋盤可發現，無論n值為何，一個n階三角棋盤的格子(正三角形)總數必為3的倍數。一來一往之間，可能造成$f_4(n,1)$函數值改變的因素就被抵銷了。

探討正八面體骰子在n階三角棋盤上滾動k圈的情形

我們參照正六面體骰子的設計，定義出正八面體骰子的結構。下圖1是正八面體骰子各面的點數。有了正四面體作為基礎，正八面體的討論就容易許多。正八面體骰子在棋盤某一邊滾動時，正八面體骰子在同一邊長上會6個面依序進行輪替，也就是三個一循環，圈數k則會2個一循環。

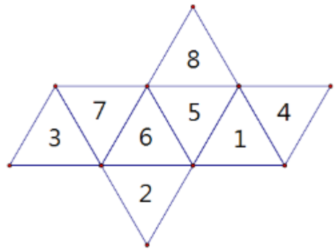

圖1：正八面體骰子各面的點數

表1：正八面體骰子的滾動通解

n	1	2	3
$f_8(n,1)$	6	1	1
$f_8(n,2)$	1	1	1

探討正二十面體骰子在n階三角棋盤上滾動k圈的情形

正二十面體在三角棋盤上滾動時，會十個面依序進行輪替，也就是邊長會五個一循環，而經由觀察後發現圈數k會10 個一循環

表2：正二十面體骰子的滾動通解

k	1	2	3	4	5
$f_{20}(1,k)$	19	8	15	7	1
$f_{20}(2,k)$	3	1	3	1	3
$f_{20}(3,k)$	5	2	14	12	1
$f_{20}(4,k)$	1	1	1	1	1
$f_{20}(5,k)$	1	1	1	1	1
k	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$f_{20}(1,k)$	19	8	15	7	1
$f_{20}(2,k)$	1	3	1	3	1
$f_{20}(3,k)$	5	2	14	12	1
$f_{20}(4,k)$	1	1	1	1	1
$f_{20}(5,k)$	1	1	1	1	1

探討正六面體骰子在$m \times n$方格棋盤上滾動k圈的情形

我們經由研究後發現，正六面體骰子在各邊長m、n上滾動，其點數會四個邊長一循環，我們利用這個原理來找出所有的結果，也發現圈數k會六個一循環。後面我們也發現朝上點數的改變與否，是受到骰子在同一邊上滾動時它的側面點數是否改變所影響。而一個骰子若滾動偶數次其側面點數將不會改變，而滾動偶數次代表此邊邊長為奇數。滾動奇數次其側面點數將會發生改變，而滾動奇數次代表此邊邊長為偶數。且其中一邊為1時，由於只是來回滾動的關係，最後朝上點數必定為1。這原因也顯現在我們找出的通解表3當中。能夠觀察到當兩邊長為偶數時，它點數必定是3個一循環，且這3個點數的面會有一個共同頂點。而當兩邊長為奇數時，它點數必定都是1。當一邊長為偶數一邊長為奇數時，它點數必定是2個一循環，且兩點數為6、1交替。

表3：正六面體骰子的滾動通解

$k(mod6)$	1	2	3	4	5	0
$f_6(2,2,k)$	5	4	1	5	4	1
$f_6(2,3,k)$	6	1	6	1	6	1
$f_6(2,4,k)$	5	3	1	5	3	1
$f_6(3,2,k)$	6	1	6	1	6	1
$f_6(3,4,k)$	6	1	6	1	6	1
$f_6(4,2,k)$	2	4	1	2	4	1
$f_6(4,3,k)$	6	1	6	1	6	1
$f_6(4,4,k)$	2	3	1	2	3	1

探討正十二面體骰子在五邊形棋盤上滾動k圈的情形

正十二面體在五邊形棋盤上滾動時，只會有五個面依序進行輪替，而五邊形棋盤只有10格，所以最後必定都是1點朝上。

五、結論與生活應用

在這個研究中，我們找出了正四面體、正六面體、正八面體骰子在n階三角棋盤、$m \times n$方格棋盤上繞行k圈並回到初始位置時，其朝上（或下）那面的點數通解。原本我們認為很複雜的問題，經過討論後就變得單純且有規律。未來我們希望能變換棋盤設計，並給予五邊形棋盤新的定義，讓他不局限於唯一的形狀，希望能有更豐富的結果。

參考資料

1. 永春高中數學科教學研究會（2019）。**108** 學年度階城盃數學年鑑。臺北市：永春高級中學數學科教學研會。
2. 許介彥（2008）。數學悠哉遊。臺北市：三民。
3. 維基百科（2020）。同餘關係。2020 年 9 月 22 日，取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%90%8C%E9%A4%98%E9%97%9C%E4%BF%82。

註：

1. 報告總頁數以 6 頁為上限。
2. 除摘要外，其餘各項皆可以用文字、手繪圖形或心智圖呈現。
3. 沒按照本競賽官網提供「表單」格式投稿，不予錄取。
4. 建議格式如下
   - 中文字型：微軟正黑體；英文、阿拉伯數字字型：Times New Roman
   - 字體：12pt 為原則，若有需要，圖、表及附錄內的文字、數字得略小於 12pt，不得低於 10pt
   - 字體行距，以固定行高 20 點為原則
   - 表標題的排列方式為向表上方置中、對齊該表。圖標題的排列方式為向圖下方置中、對齊該圖