【2021 全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

高中（職）組成果報告表單

題目名稱： 我要活下去

一、摘要

本報告將約瑟夫問題推廣，探討不同情況下的直線約瑟夫問題，找出它們每一圈倖存者之間的關係並找出通解。在直線約瑟夫問題中，我們利用紙筆及 C++作為輔助工具，探討**留 m 去 1 約瑟夫問題最後一位被淘汰的編號**以及**必須經過幾輪才會剩一位存活者**。由於最後的存活者恆為初始報數編號，所以最後的存活者不考慮。在研究中，我們成功找出遞迴規律，並能夠推廣到一般情況中。

二、探究題目與動機

在某一次的團康中，老師帶我們玩了一個有趣的命運遊戲，遊戲是這樣的:有一群人圍成一圈，並且在這群人當中隨機選一人從 1 開始順時針報數到 2 時會強制出局，之後由 1 開始循環(1、2、1、2・・・)，在條件不變的情況下只剩下一人時即為被命運選中之人。而我們對這個遊戲非常好奇，所以上網查了一下，發現原來這是約瑟夫提出的問題，而它的原始規則為殺一人、留一人、殺一人、留一人・・・求最後的存活者編號，如下圖所示。而我們探討的直線約瑟夫問題為在每一輪開始時從編號 1 開始報數，直到剩下一位存活者。而我們想探討的問題是如果**改成一直線排列，求最後一位被殺掉的人的編號**。

三、探究目的與假設

本研究主要目的為在直線約瑟夫問題中固定條件下須經過幾輪才會剩下最後一位存活者，並從中找出其通解。而條件如下：

一、留 1 去 1

二、留 2 去 1

三、留 m 去 1

以留 1 去 1 舉例，假設有 10 個人參加此遊戲，並把這 10 個人依序編號 1 到 10，則第一輪過後會存活下來的為編號為 1、3、5、7、9；第二輪過後剩下 1、5、9；第三輪過後為 1、9；第四輪過後為 1。從中我們可以發現經過第四輪時，存活者僅剩一人。

四、探究方法與驗證步驟

一、名詞定義

(一)　定義參加遊戲的人數為 k。
(二)　定義變值 r 為在運算中並非三的倍數。
(三)　留 m 去 n：在一輪中每留下 m 人就淘汰 n 人。
(四)　a_p：第 p 輪剩餘的人數。
(五)　$a_p - a_{p-1}$：在第 p 輪時被淘汰的人數。

以留 1 去 1 為例：
初始情況：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10。
第一輪過後：1、3、5、7、9。
第二輪過後：1、5、9。
第三輪過後：1、9。
第四輪過後：1。

上面紅色數字 9 是最後一位被殺掉（淘汰）的人，這就是我們想要求的。

二、研究結果

(一)　留 1 去 1

為方便解釋，我們先看一個實際的例子。現以 35 人為例：

初始情況：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、21、22、23、24、25、26、27、28、29、30、31、32、33、34、35。
第一輪過後：1、3、5、7、9、11、13、15、17、19、21、23、25、27、29、31、33、35。

第二輪過後：1、5、9、13、17、21、25、29、33。
第三輪過後：1、9、17、25、33。
第四輪過後：1、17、33。
第五輪過後：1、33。
第六輪過後：1。

上面紅色數字 33 是最後一位被殺掉（淘汰）的人，這就是我們想要求的。觀察每一輪的第二個數，依序為 2、3、5、9、17、33，每一項的差依序為 1、2、4、8、16，皆是二的整數冪次方，所以**一共要經過$\left[log_{\frac{m+n}{m}}(k-1)+2\right]$輪就會剩下唯一一位存活者**，一直到一輪中只剩下兩個數，即可發現除了 1 以外的另一個數就是最後存活的人的編號。當參加團康遊戲的人數有 k 人時，**最後一位被殺的人就是編號為$2^{[log_2 k]}+1$，也就是小於且最接近 k 的 2 次方加 1**。

(二)　留 2 去 1

為方便解釋，我們先看一個實際的例子。現以 50 人為例：

初始情況：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、21、22、23、24、25、26、27、28、29、30、31、32、33、34、35、36、37、38、39、40、41、42、43、44、45、46、47、48、49、50。
第一輪過後：1、2、4、5、7、8、10、11、13、14、16、17、19、20、22、23、25、26、28、29、31、32、34、35、37、38、40、41、43、44、46、47、49、50。
第二輪過後：1、2、5、7、10、11、14、16、19、20、23、25、28、29、32、34、37、38、41、43、46、47、50。
第三輪過後：1、2、7、10、14、16、20、23、28、29、34、37、41、43、47、50。
第四輪過後：1、2、10、14、20、23、29、34、41、43、50。
第五輪過後：1、2、14、20、29、34、43、50。
第六輪過後：1、2、20、29、43、50。
第七輪過後：1、2、29、43。
第八輪過後：1、2、43。
第九輪過後：1、2。

上面紅色數字 43 是最後一位被殺掉（淘汰）的人，這就是我們想要求的。第二輪的存活者編號每隔 2 項公差為 3；第三輪則為每隔 4 項公差為 9；第四輪為每隔 8 項公差為 27．．．，則我們可以推測第 n 輪為每隔2^{n-1}項公差為3^{n-1}。

在留 2 去 1 中，第 p 輪被淘汰的人數為$1\sim a_p$的正整數中所有 3 的倍數的人數，也就是$a_p - a_{p-1} = \frac{1}{3}(a_p - r)$，其中$r = 1 \vee 2$($r \neq 0$，因為$a_p$必定不為 3 的倍數，不存在$a_1$以外)

整理上式得：$a_p - a_{p-1} = \frac{1}{3}a_p - \frac{1}{3}r$

$\rightarrow \frac{2}{3}a_p = a_{p-1} - \frac{1}{3}r$

$\rightarrow a_p = \frac{3}{2}a_{p-1} - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}(3a_{p-1} - r)$, $r = 1 \vee 2$。

由於a_p及a_{p-1}必須是整數，所以當a_{p-1}為奇數時，$r = 1$；為偶數時，$r = 2$。

滿足以上條件：

初始條件：$a_1 = 3$

$\rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}(3a_1 - 1) = 4$

$\rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{2}(3a_2 - 2) = 5$

$\rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{2}(3a_3 - 1) = 7$

$\rightarrow \quad a_5 = \frac{1}{2}(3a_4 - 1) = 10$

$\rightarrow \quad a_6 = \frac{1}{2}(3a_5 - 2) = 14$

$\rightarrow \quad a_7 = \frac{1}{2}(3a_6 - 2) = 20$

$\rightarrow \quad a_8 = \frac{1}{2}(3a_7 - 2) = 29$

$\rightarrow \quad a_9 = \frac{1}{2}(3a_8 - 2) = 43$

上述結果可用遞迴式結合如右，這就是我們發現的通解。

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{p+1} = \frac{1}{2}(3a_p - r) \text{，} r = 1 \vee 2 \end{cases}$$

(三)　留 m 去 1

透過上述推論，可以發現在留 m 去 1 的規則中，第 p 輪被淘汰的人數為$1\sim a_p$的正整數中所有 m+1 的倍數的人數，也就是$a_p - a_{p-1} = \frac{1}{m+1}(a_p - r)$，其中$r = 1,2,3,\dots,m$($r \neq 0$，因為$a_p$必定不為 m+1 的倍數，不存在$a_1$以外)

整理上式得：$a_p - a_{p-1} = \frac{1}{m+1}a_p - \frac{1}{m+1}r$

$\rightarrow \frac{m}{m+1}a_p = a_{p-1} - \frac{1}{m+1}r$

$\boldsymbol{\rightarrow a_p = \frac{m+1}{m}a_{p-1} - \frac{1}{m}r = \frac{1}{m}\left((m+1)a_{p-1} - r\right),\ r = 1,2,3,\dots,m}$。

上述紅色粗體的式子就是留 m 去 1 的約瑟夫問題的通解。

五、結論與生活應用

本研究中，我們得到留 m 去 1 的約瑟夫問題的遞迴式通解：

$$a_p = \frac{m+1}{m}a_{p-1} - \frac{1}{m}r = \frac{1}{m}\left((m+1)a_{p-1} - r\right),\ r = 1, 2, 3, \ldots, m$$ 。

目前我們還沒想到這個研究在生活中非常貼切的應用，但我們發現改變規則後，無論是在玩團康遊戲、抽籤、換座位、或是讓大家活絡氣氛時，都非常適合，而且效果比原始約瑟夫問題來得好。在本研究的條件下，每一輪的編號之間都具有密切的關係存在，並利用規律找出遞迴式。總而言之，當我們必須推派代表、進行有規律的篩選時，都可以利用本研究結果，或加以延伸，進而選出一位代表。

參考資料

1. 作者不詳（2020）。約瑟夫問題。2021 年 4 月 6 日，取自 https://openhome.cc/Gossip/AlgorithmGossip/JosephusProblem.htm
2. 維基百科（2019）。約瑟夫斯問題。2021 年 1 月 5 日，取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BA%A6%E7%91%9F%E5%A4%AB%E6%96%AF%E9%97%AE%E9%A2%98。
3. 蔡聰明（2000）。**數學的發現趣談**。臺北市：三民出版社。