

# 【2021 全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

教師組 教案表單與學習單

<b>教案設計者：</b> 陳其威
<b>課程領域：</b>
<input checked="" type="checkbox"/> 物理 <input type="checkbox"/> 化學 <input type="checkbox"/> 生物 <input type="checkbox"/> 地球科學 <input type="checkbox"/> 科技領域 <input type="checkbox"/> 其他_____
<b>教案題目：</b>
當我們「擺」在一起!
<b>授課時數：</b>
6 節 ( 2+2+2 )
<b>教案設計理念與動機：</b>
<p>新課綱邁入第二年的階段，許多學校也陸陸續續開設探究與實作的課程，與其他學校夥伴們談論課程時，大家總覺得負擔很重，除了準備新課綱的一般課程外，還要額外花許多時間準備實作課程，從設計實驗到實際操作一次，開課時還需準備實驗器材與整理收納等，而學生在學習方面，的確能夠加深印象，並增加許多手作的技能，這也是新課綱強調的「帶得走的能力」。</p> <p>在本篇的教案設計中，以擺(pendulum)的概念出發，運用數學的三角函數，最後讓同學們親自操作，設計出屬於自己的利薩如曲線 ( Lissajous curve )。生活中有許多的週期運動，例如電扇的旋轉、說話時喉嚨的震動、地震時吊燈的搖晃等，這些運動都可以用簡諧運動來分析，而簡諧運動最經典的實驗就是伽利略的單擺實驗，從單擺實驗出發，接著介紹其他也具有週期性的擺，例如：蛇擺、複擺、扭擺、Y字擺，理論的推導或許對於某些同學比較深入，但從實驗的角度出發，可以討論不同的變因，比較實驗的結果與理論的差異。</p> <p>材料的準備算是蠻方便的，主要器材有棉線、寶特瓶、直尺與砝碼等，搭配學校的支架就能夠操作這一系列的實驗，這裡特別提一下複擺的部分，市面上有販售現成製作好的儀器，金屬材質搭配無摩擦的軸承，外加自動化測量與作圖，真的是很精密的儀器；但價格相當昂貴許多，並且也缺乏了探究的精神，本教案的設計是使用雷射切割機切出不一樣的複擺 ( 若無雷射切割機，可以使用兩隻直尺取代 )，讓同學們從中探索擺中的奧秘！<b>希望透過這一系列的實驗操作，讓同學們更能體會簡諧運動之美，並提升同學們動手做與分析實驗數據的能力，能夠在大多學校推廣！</b></p> <p>物理選修實驗課是本校的特色課程之一，之前規畫了許多實驗，後來發現將這些小實驗簡化，也很適合放在探究與實作的課程中，在課堂中讓同學動手做的小活動，不僅能提升學習動機，亦能增加物理課程與生活的連結；若是將不同的小主題做相關連結，並在分析上加入同學自行設定的變因，則形成開放性的問題，即可成為探究與實作課程的一部分。但不論是哪種課程，<b>核心課程理念都是希望同學能在做中學 (Learning by Doing)，將課本中的物理知識化做生活的一部分！</b></p>

## 教學目標：

認知：等速率圓周運動的投影即為簡諧運動。

技能：利用擺的運動週期特性，測量週期性與擺長之間的關係。

技能：運動除了一維方向的震動，還有旋轉的擺動，找出擺動的特性。

情意：說明理論的週期運動與生活中的相關性，讓同學發會創意設計不同的擺。

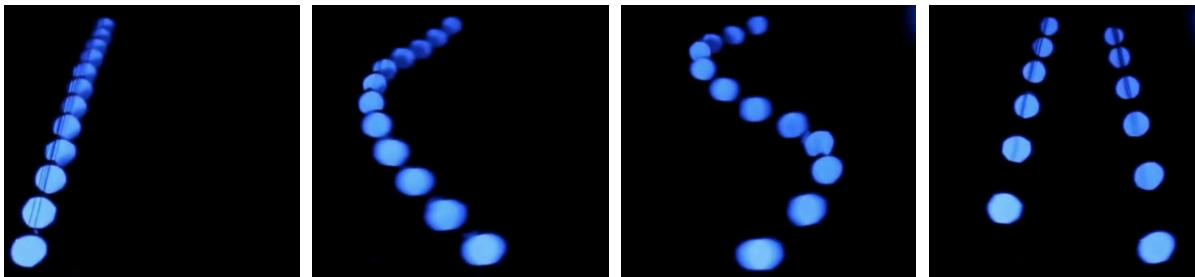
## 教育對象：

國三、高一、高二學生（可搭配課本日常生活中常見的彈簧震動、簡諧運動等單元）

## 課程設計（方法與步驟）：

### 壹、引起動機：

黑暗中做實驗往往增添不少神秘感，網路上曾一段小球來回擺盪的實驗影片，這些發光小球從原本一條直線的運動，變成彎曲的蛇，而蛇的擺動越來越劇烈，到交錯並排，最竟然又回到原本的狀態！教師可以與同學討論神秘的小球是如何運動？為什麼看似無序的運動，過程中竟然變成如此有序，甚至能夠回到起初的狀態。



▲美麗的蛇擺是如何產生的呢？（[連結](#)）

### 貳、操作步驟

#### 一、第一部分：單擺的基本量測

1. 將擺錘繫在繩子上，固定於支架並測量擺長。
2. 利用馬錶測量擺錘來回 10 次的週期，重複五次取平均與不確定度。
3. 改變擺垂質量、擺長，重複以上步驟。
4. 畫週期與擺長之全對數關係圖與週期平方與擺長之關係圖。



▲2 單擺實驗擺錘的擺角不可太大

## 二、第二部分：複擺與扭擺的設計

1. 在 26 公分的尺上，每隔 1 公分鑽一個小孔洞。
2. 將迴紋針固定於桌子邊緣，並穿入塑膠尺的小孔
3. 讓塑膠尺來回震盪，並記錄震盪十次週期所花費的時間
4. 繪製週期與位置的關係圖，比較與理論的差異。



▲ 利用手機量測週期



▲ 自製的壓克力複擺

## 三、第三部分：Y 字擺繪製利薩如曲線

1. 將寶特瓶的底部剪下，留下上半部，並於蓋子戳洞，能讓細沙順利通過。
2. 使用小鐵環將其固定成 Y 字型，讓寶特瓶懸掛在空中，並量測長度。
3. 在桌面上鋪上海報紙，使其服貼於桌面上。
4. 讓寶特瓶從不同位置（速度）開始做週期運動。
5. 調整 Y 字擺的長度比例，重複實驗，觀察圖形的變化。



▲ 量測 Y 字擺的長度比例

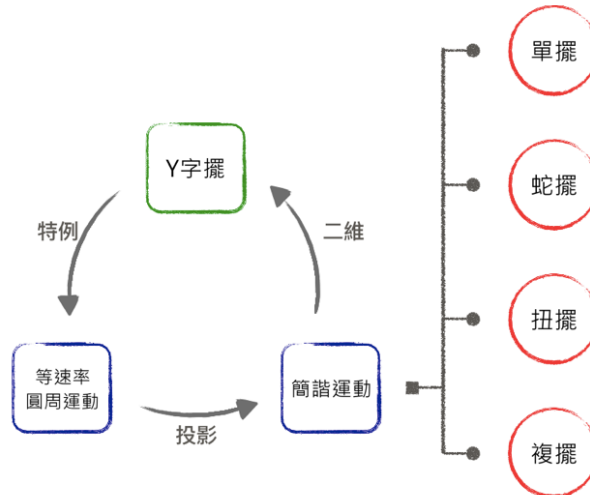


▲ 使用手機錄製擺錘的運動過程

## 參、討論與分享：

### 一、當我們擺在一起的實驗流程：

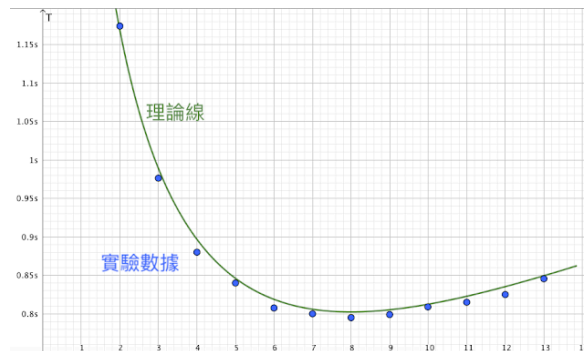
1. 可搭配課程的等速率圓周運動與簡諧運動開始。
2. 介紹不同的週期運動，從簡單的單擺開始，到比較複雜的扭擺與複擺。
3. 可讓同學思考，在兩個方向上的週期運動之疊加，會是如何運動？
4. 介紹 Y 字擺的構造，與利薩如曲線之關係，延伸至示波器的圖形。
5. 實際設計與操作 Y 字擺，做適當的調整繪製屬於自己的利薩如圖形。



▲ 擺的六堂課之實驗流程圖

### 二、討論複擺的週期：

單擺的擺長越長週期越大，但為什麼懸掛塑膠尺的位置，並不是如此呢？

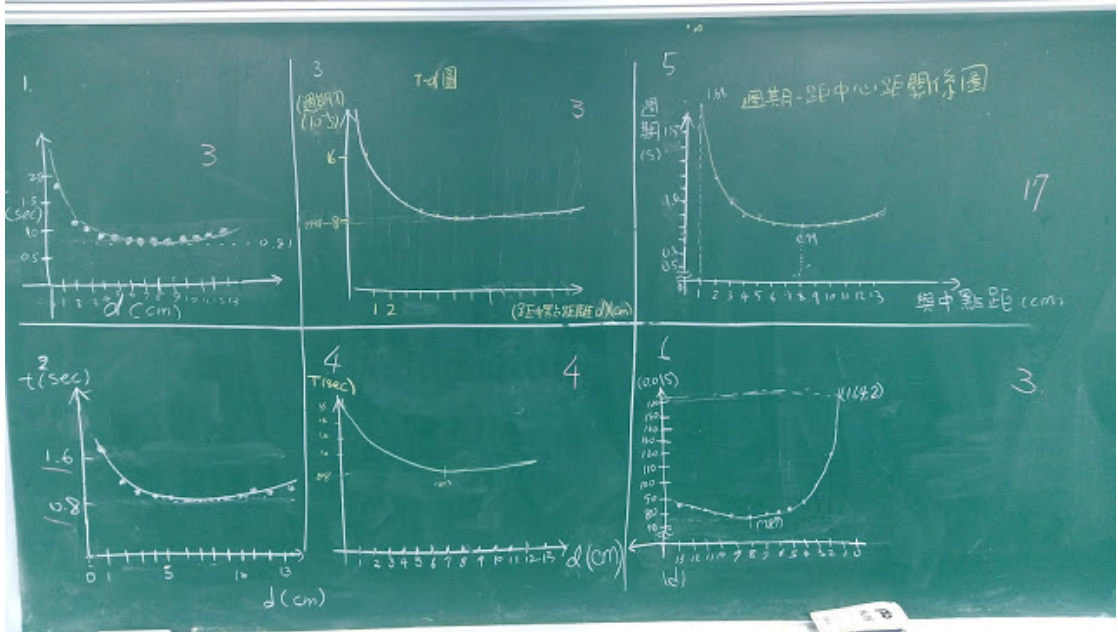


▲ 將數據繪製於圖形上，並與理論的曲線比較其差異

### 三、探究元素：

1. 單擺的週期與哪些物理量有關？
2. 扭擺的週期與哪些物理量有關？
3. 討論複擺的週期，為什麼會有最小值？
4. 改變 Y 字擺的起始位置、速度，觀察利薩如圖形的變化。
5. 改變 Y 字擺的張角、擺長，觀察利薩如圖形的變化。
6. 透過假設與修正並與知識的連結，找出 Y 字擺的週期模型。

#### 四、同學們分享數據：



▲下課前，先讓同學們將自己的數據繪製在黑板上，並簡單說明實驗結果

#### 學習評量內容 (學生的書面報告)

學生可將報告繳交至學期歷程檔案中，留下學習的點滴。

1. 讓同學們自行挑選有興趣的主題撰寫成數面報告
2. 可將比較完整的報告與同學們分享，讓其他同學參考並改善。
3. 學期末在規定時間上傳至學習歷程的平臺，未來作為的檔案使用。

複擺實驗

實驗目的：探討複擺的公式，並找出週期最小的位置。

或、實驗器材：支架、細線、複擺尺、量角器、碼表、方格紙

參、實驗原理及方法：

1. 複擺理論指導
 
$$-mgx \times \theta = \left( \frac{ml^2}{12} + mx^2 \right) \times \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgx}{\frac{ml^2}{12} + mx^2} \times \theta = 0$$

$$\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{ml^2}{12} + mx^2}{mgx}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + x^2}{\frac{g}{3}x}} = \pi \sqrt{\frac{l^2 + 12x^2}{3gx}}$$

( $l$  為重力加速度， $l$  為複擺尺的長度， $x$  為轉軸到重心的距離)
2. 複擺裝置
 

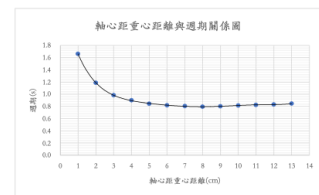
本次實驗使用的複擺尺，尺上有洞，每個洞之間的距離皆為 1 公分，藉由固定複擺尺位置的不同，改變複擺擺動的週期。

1 公分

肆、實驗步驟

1. 將複擺尺固定於桌邊邊緣，並將打孔的尺穿入
2. 將某處切實置，並記錄擺動十次週期所花費的時間
3. 代入公式計算並分析

軸心距重心 距離(cm)	週期				
	第 1 次測量(s)	第 2 次測量(s)	第 3 次測量(s)	平均(s)	不確定度
1	1.653	1.673	1.662	1.6627	0.0058
2	1.189	1.183	1.189	1.1870	0.0020
3	0.983	0.986	0.979	0.9827	0.0021
4	0.907	0.896	0.901	0.9013	0.0032
5	0.846	0.845	0.843	0.84467	0.00089
6	0.818	0.823	0.813	0.8180	0.0029
7	0.805	0.805	0.805	0.8050	0
8	0.798	0.799	0.79	0.7957	0.0029
9	0.808	0.803	0.797	0.8027	0.0032
10	0.82	0.812	0.811	0.8143	0.0029
11	0.823	0.828	0.824	0.8250	0.0016
12	0.831	0.832	0.833	0.83200	0.00058
13	0.846	0.848	0.843	0.8457	0.0015



陸、問題與討論

1. 請推導出複擺週期的最小值是在什麼位置。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + x^2}{gx}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12x} + x}{g}}$$

變數的部分只有  $\frac{l^2}{12x} + x$ ，因此當  $\frac{l^2}{12x} + x$  有最小值時，週期便有最小值。因此用算幾

不等式可得：

$$\frac{\frac{l^2}{12x} + x}{2} \geq \sqrt{\frac{l^2}{12x} \times x} = \sqrt{\frac{l^2}{12}}$$

$$\rightarrow \left( \frac{l^2}{12x} + x \right) \geq 2 \times \sqrt{\frac{l^2}{12} \times \frac{\sqrt{3}}{3} l} = \frac{\sqrt{3}}{3} l, \text{ 當 } \frac{l^2}{12x} = x = \frac{\sqrt{3}}{6} l \text{ 時，會產生最小值}$$

因此轉軸距重心  $\frac{\sqrt{3}}{6} l$  時，週期會有最小值。

#### ▲週期運動-複擺報告的範例

物理報告—扭擺運動

一、實驗目的

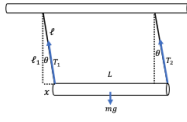
測量單擺、扭擺運動的週期和擺長的關係

二、實驗器材

金屬棒、棉線、支架、碼表、尺

三、實驗原理及方法

(一)左右擺動



▲圖一、左右擺動示意圖

根據靜力平衡及力矩平衡，可以得到：

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)\cos\theta = mg \\ T_1 L \sin(90^\circ - \theta) = T_2 L \sin(90^\circ - \theta) \end{cases}$$

根據下式，有  $T_1 = T_2$ ，故  $T_1 = T_2 = \frac{mg}{2\cos\theta}$

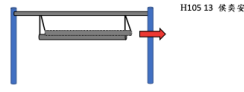
金屬棒所受靜力為  $(T_1 + T_2)\sin\theta = \frac{mg}{\cos\theta} \times \sin\theta$

在  $\theta$  極小時， $\theta_1 = \theta$ ，上式可近似為：

$$\begin{aligned} \sum F &= \frac{mg}{\cos\theta} \times \sin\theta = -\frac{mg}{L} \times \sin\theta \\ &= -mg \frac{x}{L} = -\frac{mg}{L} x \end{aligned}$$

根據簡諧運動週期公式，可得

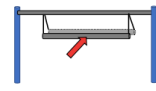
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{L}}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



▲圖四、實驗裝置(一)示意圖

(二)前後擺動

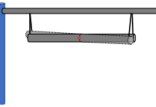
- 1.將金屬棒以棉線扭住兩端，並吊在支架上。
- 2.沿垂直金屬棒且平行地面的方向把金屬棒以小角度扭起來並放開，測量 20 個週期再算出一個週期的時間，重複三次取平均。
- 3.改變不同擺長，重複 2。



▲圖五、實驗裝置(二)示意圖

(三)水平扭動

- 1.將金屬棒以棉線扭住兩端，並吊在支架上。
- 2.把金屬棒自中心以小角度前後扭轉並放開，測量 20 個週期再算出一個週期的時間，重複三次取平均。
- 3.改變不同擺長，重複 2。



▲圖六、實驗裝置(三)示意圖

五、實驗結果

金屬棒長度 50.00cm

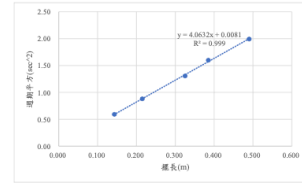
(一)前後擺動

表一、各次週期測量數據紀錄(單位:秒)

擺長	49.00cm					38.50cm				
	1	2	3	平均	T	1	2	3	平均	T
左右擺動	28.19	28.16	28.34	28.23	1.41	25.36	25.22	25.29	25.29	1.26

擺長	32.50cm					21.50cm				
	1	2	3	平均	T	1	2	3	平均	T
左右擺動	22.91	22.8	22.87	22.86	1.14	18.82	18.78	18.72	18.77	0.94

擺長	14.30cm				
	1	2	3	平均	T
左右擺動	15.41	15.39	15.37	15.39	0.77



圖七、左右擺動之擺長和週期平方值關係圖

▲週期運動-扭擺報告的範例

複擺：Y字擺

一、實驗目的

透過兩個不同週期的簡諧運動之組合，並觀察其軌跡(利薩如圖形)，來了解簡諧運動的特性。

二、實驗原理

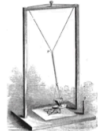
Y字擺有x方向及y方向上的簡諧運動，其軌跡不同於一般的單擺只會在一直線上運動，而是兩個方向有各自週期的簡諧運動。

三、實驗器材

棉線、寶特瓶、沙子、海報紙、小鐵環

四、實驗步驟

1. 準備一個去除底部的寶特瓶
2. 用天花板固定從兩個位置固定性棉線，並用小鐵環將其固定成Y字型
3. 在棉線的底端綁上寶特瓶，並使其垂直指向地面
4. 在瓶蓋上黏膠，使沙子能夠順利通過
5. 在桌面上鋪上海報紙
6. 在瓶子中裝入沙子，並使其以小角度微震盪
7. 記錄沙子在海報紙上的圖形
8. (利用Geogebra繪出不同的利薩如曲線)



五、公式推導

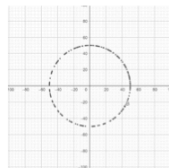
$$x \text{ 方向: } R\cos(\omega t) = R\cos(\frac{2\pi}{T}t) = R\cos(\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{L}{g}}t) = R\cos(\sqrt{\frac{g}{L}}t)$$

$$y \text{ 方向: } R\sin(\omega t) = R\sin(\frac{2\pi}{T}t) = R\sin(\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{L}{g}}t) = R\sin(\sqrt{\frac{g}{L}}t)$$

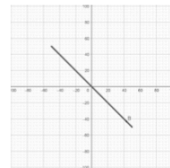
五、數據與分析

m: x方向單擺的週期; n: y方向的週期(兩者皆最簡單整數比)  
t: 時間; a: 起始角度差

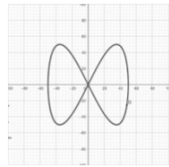
m: n=1:1 (a=0) → 圓形



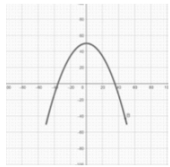
m: n=1:1 (a=π/4)



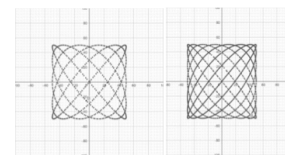
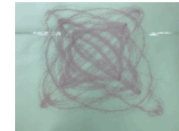
m: n=1:4 (a=0)



m: n=1:4 (a=π/4)



本次實驗結果



本次實驗結果的x及y方向週期比應介於25:36(左圖)到49:64(右圖)之間

六、問題與討論

1. 為何實驗做出的圖形與理論的圖形會時有差異?  
實驗中的Y字擺在擺動過程會受到阻力，使震盪的半徑逐漸縮小，可以從圖中看出圖形的軌跡有越來越小的趨勢，而理論的圖形的震盪半徑固定，故可以形成完整規律性的圖形。
2. 如何使海報紙上的圖形更加清晰?  
可以將所使用的沙子進行過濾，使其顆粒更小;也可以調整瓶蓋上的洞的大小，調整其漏沙的速率;並避免寶特瓶在震盪中旋轉或者是偏向其中一邊，並保持瓶口與海報紙的距離在10公分左右

七、心得

這次的實驗蠻有趣的，整個器材的架設都是小組自己完成的，光是把棉線以Y字型將寶特瓶固定完整就蠻費時的，而且還要多次調整棉線的長度，而且裝有沙子的寶特瓶其實有一定的重量，掛到線上時又會使整個擺被稱量的拉長，導致第一次畫記的時候失敗，寶特瓶在震盪過程因為接觸到桌面而停止，形經過調整之後就有做出還不錯的成果，整個實驗蠻有趣的，也有不少需要自己動手製作調整的部分。

▲週期運動-Y字擺報告的範例

參考資料：

1. 擺的故事 (前人的足跡)  
<http://chiuphysics.cgu.edu.tw/yun-ju/cguweb/sciknow/phystory/pendulum/pendulum00.htm>
2. The Physics of Flat Line Oscillation.  
<https://www.tutelman.com/golf/shafts/FLOphysics.php>
3. 大幅震動的金屬環是怎麼回事?  
<https://scitechvista.nat.gov.tw/c/sTgl.htm>
4. 簡諧運動，高空腳踏車不倒翁  
<https://scitechvista.nat.gov.tw/c/sTQb.htm>

## 學習單-伽利略單擺實驗

壹、實驗目的：探討單擺擺長與擺動週期之關係，從實驗推導出週期公式。

貳、實驗儀器：支架、棉繩、擺錘、直尺、量角器、碼表（請勿當玩具！）

參、原理及方法：

1. 伽利略觀察比薩大教堂的吊燈擺動時，利用自己的脈搏頻率，發現吊燈擺動的週期具有等時性，並與擺角無關係，進而研究發現週期的平方與鐘擺的長度成正比。
2. 單擺做小角度運動時，擺錘的運動可視為簡諧運動（物體所受合力滿足虎克定律）。
3. 透過數學分析，可以得到週其與擺長的關係  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
4. 對等號兩邊同時取  $\log$  可得  $\log T = \log \frac{2\pi}{\sqrt{g}} + \frac{1}{2} \log \ell$ ，可從斜率分析次方關係。

肆、實驗步驟：

1. 將擺錘繫在繩子上，固定於支架並測量擺長。
2. 拉起擺錘（擺角不可太大），讓擺錘開始擺動。
3. 利用馬錶測量擺錘來回 10 次的週期，重複五次取平均與不確定度。
4. 改變擺長，重複以上步驟。
5. 畫週期與擺長之全對數關係圖與週期平方與擺長之關係圖。

伍、問題與討論：

1. 擺長的測量有哪些需要注意的地方？端點該如何取？
2. 小角度的單擺才能近似簡諧運動，請問角度小於多少度較適當？
3. 碼錶的起始時間該如何選擇？適合用放手的時間嗎？
4. 實驗中，兩個關係圖的斜率、截距分別代表什麼意思？請簡單說明。
5. 實驗過程中，哪些會造成實驗不確定度？該如何降低本次實驗的不確定度呢？

陸、數據記錄：

擺長 ( m ) 與週期 T ( s ) 的關係：

10 次的 週期(s) 擺長(m)	1	2	3	4	5	10 次 平均值	單次 平均值	不確定度 $\sigma_x$

log T								
log L								

週期與擺長之全對數關係圖：

週期平方與擺長之關係圖：

