

## 【2020 全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

題目名稱：斗轉星移—在納許棋盤上互換黑白棋的最少步數

### 一、摘要

本研究主要是想了解如果用納許棋的棋盤來玩互換黑白棋得最少步數。我們先是找到了將兩邊棋子互換而消耗最少步數的走法，再以此走法來研究改變棋盤格數所影響的步數規律變化，並求出這個走法下的最少步數公式。求出此公式的過程中，我們又發現此走法在奇數邊長格數和偶數邊長格數的棋盤下，會有不同的規律及公式。在推導出正六邊形的公式後，我們突發奇想，想到可以改變構成棋盤的棋盤格形狀。於是，這個研究又衍生出了由正三角形所構成的棋盤，由三角形構成的棋盤走法更加複雜，但其公式仍然和原來的正六邊形棋盤相同。

### 二、探究題目與動機

第一次接觸到互換黑白棋時，我們只想到把原本的棋盤加長，但是後來黑白棋的互換讓我們聯想到納許棋，而納許棋的棋盤又有更豐富的變化性(像是邊長)，所以我們選擇用納許棋盤來做另類的互換黑白棋。

### 三、探究目的

- 一、求出在相同的走法下，不同邊長棋盤中的最少步數。
- 二、求出當棋盤縮放時，相同走法下最少步數的規律變化公式。
- 三、求出當構成棋盤的格子形狀變化時互換黑白棋的最少步數公式。

### 四、探究方法

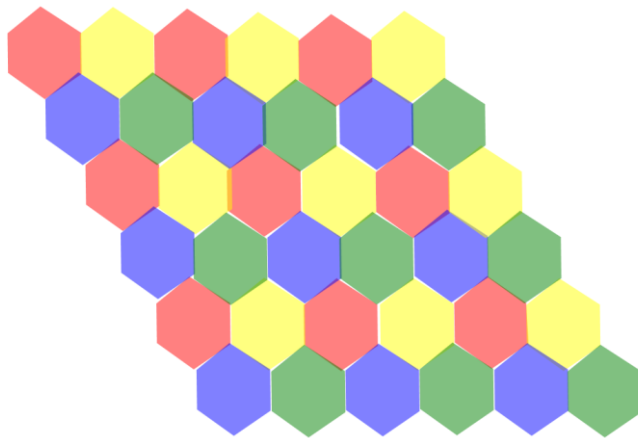
器材：白板&白板筆、電腦、兩種顏色的磁鐵、耐心以及毅力

這個研究可以算是自創一個數學遊戲，我們的規則是將兩種不同顏色的棋子擺在平行四邊形的一組對邊，然後以最少步數將兩邊的棋子互換，也就是將兩種顏色的棋子互換位置。設原本有一排黑棋在平行四邊形棋盤的其中一條邊 A 上，而另外又有一排白棋在黑棋的對邊 B 上，而我們

的目的就是通過移動棋子來做到把所有黑棋移動到邊 B 上，也把所有的白棋移動到邊 A 上。

根據我們反覆實驗的結果，用一些花里胡哨，跳來跳去的走法反而會消耗更多的步數，最終，我們嘗試出了一種最簡單，同時花費步數也最少的走法，具體操作如下：

把同色棋子兩兩一組，將一顆棋子移動一步至另一顆棋子前面，接下來一步跳一步，交互前進。走到底時，有一顆棋子需要多走兩步才能進入原定的格子。如果是奇數棋盤，剩下來的兩顆異色棋子便直接前進，相遇時其中任意一方跳過去再走到底即可。



左圖為 6 乘 6 的六邊形棋盤

盤

下表是對於這個走法的步數研究

邊長格數	花費步數	套用公式
10 乘 10	110	$x(x+1)$
9 乘 9	95	$x^2+2x-4$
8 乘 8	72	$x(x+1)$
7 乘 7	59	$x^2+2x-4$
6 乘 6	42	$x(x+1)$
5 乘 5	31	$x^2+2x-4$
4 乘 4	20	$x(x+1)$

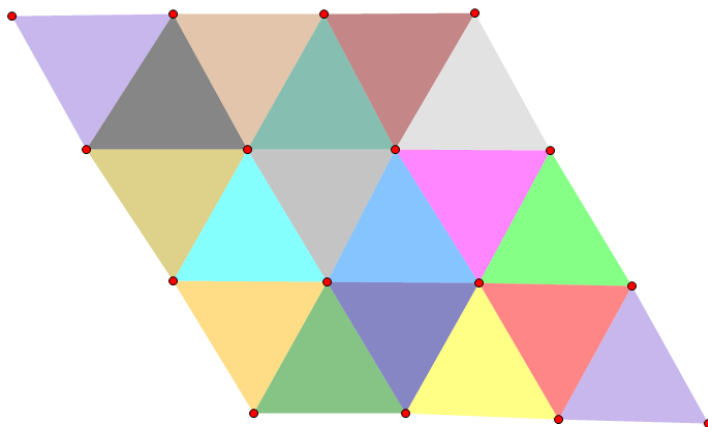
下表為我們整理出來的步數和棋盤規格關係：

棋盤規格	步數
------	----

4 乘 4	20
5 乘 5	31
6 乘 6	42
7 乘 7	59
8 乘 8	72
9 乘 9	95

正三角形的棋盤明顯棋路複雜許多，只有倒三角形的格子可以直接上下行進，正三角形格子裡的棋子只能先往斜上方走，在往另一個斜上方走一步，以至於須要走兩步才能向上移動一格，在相同邊長的情況下，走法會比原本的正六邊形更複雜。以目前的研究成果來看，我們意外的發現，以正三角形構築成的平行四邊形棋盤，其最少步數之公式居然和正六邊形相同。

下圖為 6 乘 6 的三角形棋盤：



正三角形的棋盤明顯棋路複雜許多，只有倒三角形的格子可以直接上下行進，正三角形格子裡的棋子只能先往斜上方走，在往另一個斜上方走一步，以至於須要走兩步才能向上移動一格，在相同邊長的情況下，走法會比原本的正六邊形更複雜。以目前的研究成果來看，我們意外的發

現，以正三角形構築成的平行四邊形棋盤，其最少步數之公式居然和正六邊形相同。

以下是一些我們找到關於納許棋的文獻：納許棋是一種不會平手，且先手有必勝策略的棋類遊戲，由紅藍兩方交互落子。一旦有一方將左右或上下兩邊以棋子連接起來，即獲勝。由於如果有一方無法連接，另一方就一定會有至少一條的連接路徑，綜上所述，納許棋一定會有勝敗。
