【2021 全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

國中組 成果報告表單

題目名稱：珠「筆」交輝——多面體一筆畫的探究

一、摘要：

由於暑假作業和串珠社同學的作品激起了我們的興致，我們便開始以下的研究。研究是以多面體組成和利用串出多面體探討多面體的一筆畫為基本要素。研究過程包括查找資料以探討多面體組成、透過了解一筆畫定理定義多面體的一筆畫以及利用串珠證明我們的推論，再提出其餘多面體無法串出的原因，最後，我們將上述所得的結果整理為多面體一筆畫的條件，算出每個多面體所需線的最短距離，完成我們的研究。

二、探究題目與動機

某日，我們班的同學從串珠社帶回串珠成品，這些小珠子立刻引起了我們的興趣。之後的暑假，學校老師派出有關多面體的暑假作業(如下圖)，我們立即聯想到多面體可以藉由串珠的方式呈現，也是找出相關數學概念的方法之一，雖已完成暑假作業，但我們仍意猶未盡的想深入探討珠子間的特性，於是我們便磨拳擦掌，展開了這場振奮人心的研究。






三、探究目的與假設

1. 探討多面體的種類與組成。
2. 定義多面體在串出的一筆畫規則。
3. 串珠多面體能一筆畫串出的條件。
4. 串珠多面體能一筆畫串出的線的最短長度。

四、探究方法與驗證步驟

(一)事先準備的器材：

串珠(10mm 圓珠)、釣魚線、剪刀、長尾夾、電腦

(二)我們的實驗步驟如下：

- step1.探討正多邊形如何組成柏拉圖多面體
- step2.探討柏拉圖多面體如何形成阿基米德多面體
- step3.利用這兩種多面體的特性探討一筆畫和我們對一筆畫的定義
- step4.探討多面體的一筆畫和平面的一筆畫定理有何不同
- step5.利用串珠證明多面體的一筆畫是否符合我們的假設
- step6.結論:多面體的形成方式如何影響其一筆畫，並求釣魚線的最短長度

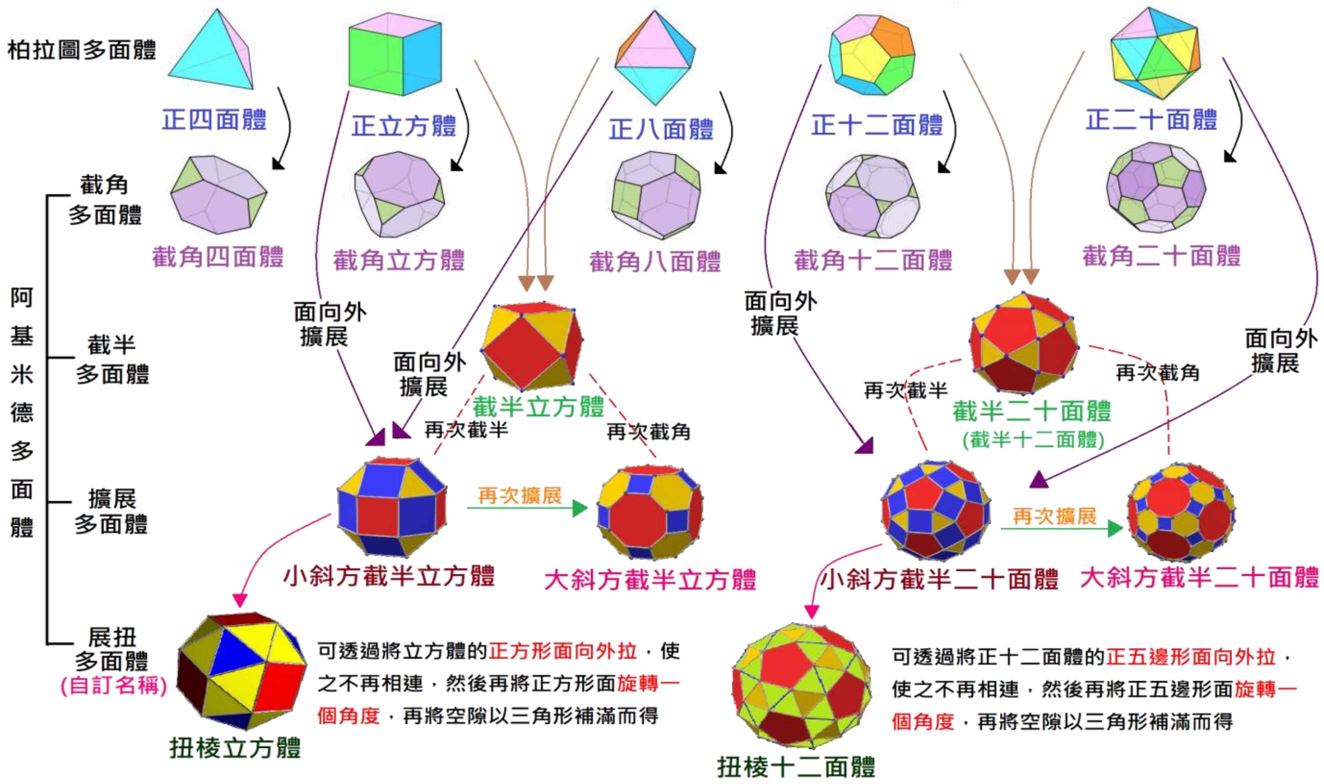
(三)研究過程

1. 柏拉圖多面體：柏拉圖多面體是指各面都是全等的正多邊形、且每一個頂點所接的面數都相同的凸多面體。而柏拉圖多面體共有五個，分別是正四面體、正六面體、正八面體、正

十二面體和正二十面體。

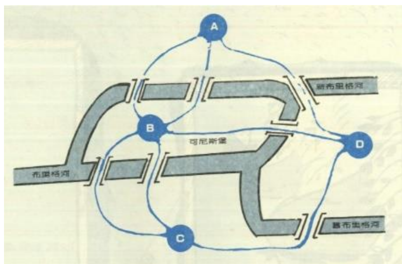
2. 阿基米德多面體：高度對稱的半正多面體，且使用兩種或以上的正多邊形為面的凸多面體，並且都是可以從正多面體經過截角、截半、截邊等操作構造。

我們透過維基百科、文獻整理「柏拉圖多面體」和「阿基米德多面體」的關係圖，如下：



3. 平面一筆畫問題

歐拉在聖彼得堡科學院發表《哥尼斯堡的七橋》一文中解答。他將陸地簡化成點，而橋則用線來代表。他發現若從某點出發後最後在不走重覆路線地回到起點，連接起點的線數目必須是雙數。歐拉稱這種點稱為偶頂點，而連有單數條線數目的點稱為奇頂點。由於「七橋問題」中的陸地（點）連接的橋（線）為單數，所以無法做到一次過走遍 7 條橋而不重覆。歐拉在解答「七橋問題」中也提出了「一筆劃定理」。



4. 多面體一筆畫的定義

歐拉提出的一筆畫定理能夠完整敘述平面一筆畫的形成條件，但我們對於多面體能否符合一筆畫有高度興趣，因此提出部分並加以調整。我們的考量範圍包含多面體與串珠的特性，串珠多面體需一條線串完不得中斷，於是我們將串珠多面體一筆畫的定義建立在每個珠子只能被一條線串過兩次，方能形成串珠多面體的一筆畫。以下我們定義多面體中奇數點和偶數點的意義。

奇數點：連接奇數個邊的頂點；偶數點：連接偶數個邊的頂點

	串一五邊形，粉紅珠子對穿		串兩個五邊形，粉紅珠是對穿珠也是共用珠，因需滿足一筆畫，故對穿另一個紫色珠。

(1)平面串珠串法

串珠可以分為三珠環、四珠環、五珠環、六珠環等等，如下圖所示。

三珠環

四珠環

五珠環

六珠環

在我們試串的過程中，三、四、五、六珠環較為穩定，七珠環以上相對較不穩固，所以珠數越多的珠環越容易變形，越不穩固。此有可能為無法成功串出多面體的原因之一。

(2)多面體串珠的方法可分兩種方式：「串邊」和「串點」

串邊：指的是每個珠子將對應到此多面體的每個邊(面與面間只對穿 1 顆)。

串點：指的則是每個珠子將對應到此多面體的每個頂點(面與面間會對穿 1 或 2 顆)。

	正四面體	立方體	正十二面體	正二十面體	大斜方截半立方體	大斜方截半二十面體	截角四面體
奇數點(3)	4	8	20	0	48	120	12
奇數點(5)	0	0	0	12	0	0	0

	截角立方體	截角八面體	截角十二面體	截角二十面體	扭稜立方體	扭稜十二面體
奇數點(3)	24	24	60	60	0	0
奇數點(5)	0	0	0	0	24	60

	正八面體	截半立方體	小斜方截半立方體	截半二十面體	小斜方截半二十面體
偶數點(4)	6	12	24	30	60

以下是我們成功串出的多面體模型：

柏拉圖多面體:

立方體(同截半立方體)

正八面體

正十二面體(同截半二十面體)

阿基米德多面體:

截半立方體

小斜方截半立方體

大斜方截半立方體

截半二十面體

小斜方截半二十面體

大斜方截半二十面體


截角四面體


截角立方體


截角八面體


截角十二面體


截角二十面體

(3)由上述這些成功串出的多面體，我們發現

①具有偶數點的多面體(串點)皆可被串出

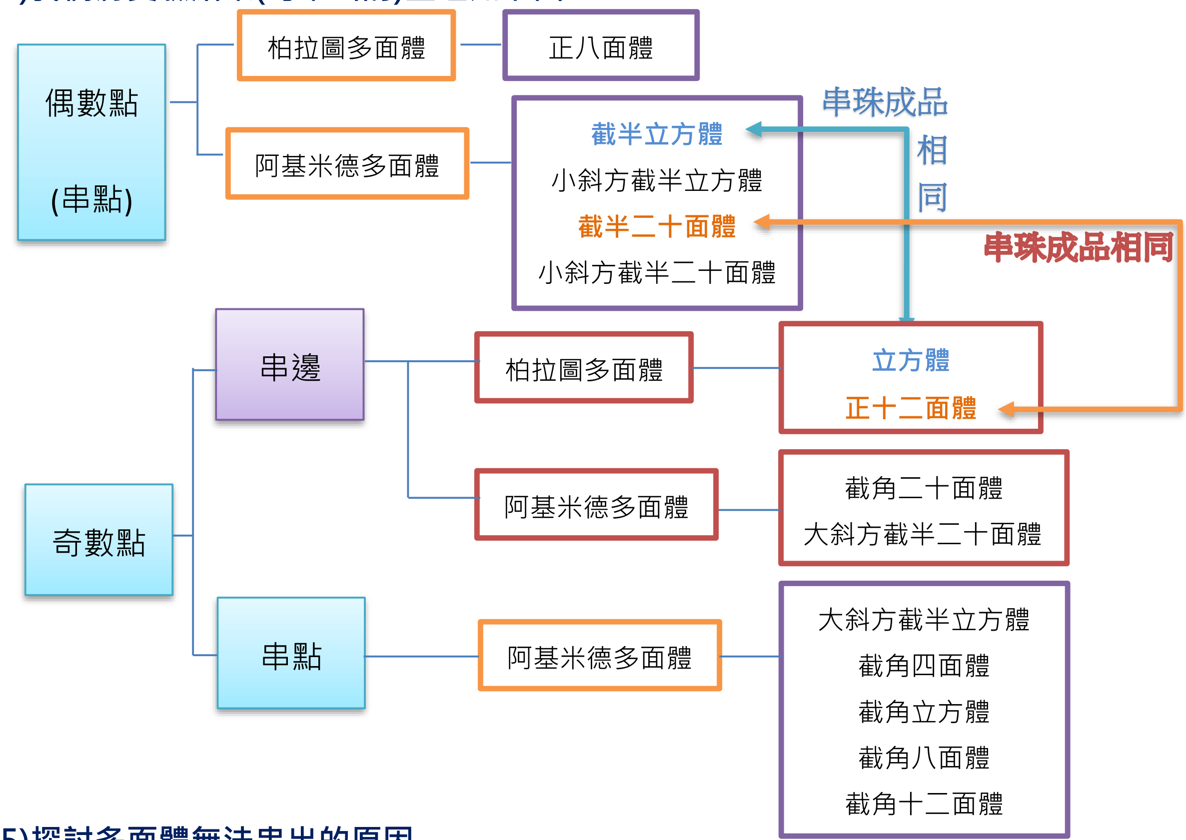
②分類為奇數點(3)中的柏拉圖多面體皆為串邊

③這些被串出的多面體皆有固定的串法規律

④串珠可以呈現多面體的一筆畫規則

⑤多面體是奇數點為 5 的「正二十面體」、「扭稜立方體」與「扭稜十二面體」和奇數點為 3 的「正四面體」無法串出

(4)我們將實驗結果(可串出的)整理如下圖



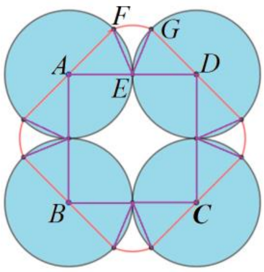
(5)探討多面體無法串出的原因

①正四面體、②正二十面體:每個面皆為三角形不須串邊形成三角形，且為奇數點(3)。由於三角形串點時會在接面時使用到同一顆對穿珠，使其被線穿超過兩次，無法形成一筆畫。

③扭稜立方體、④扭稜十二面體:本身具有三角形不須串邊形成三角形，而串點的話就會遇到上述正四面體所遇到的問題。

(6)探討穿珠串出多面體所需釣魚線的最短長度

我們在計算釣魚線的最短長度時，須符合幾個假定：①上視圖觀看珠子間彼此相切、②珠子孔洞裡的釣魚線是一條直線、③兩顆珠子間的釣魚線呈現以珠子相切的切點為圓心所圍成的圓弧。以下以四珠環(珠子直徑為 1 公分)為例：



A. 連心線圍成正方形 $ABCD$，其 A 點與切點 E 和珠子直徑端點 F、G 形成等腰△。$\angle FAE=\angle GDE=45°$，$\angle FEG=\widehat{FG}=180°-(\angle FEA+\angle GED)=45°$，同理，其他弧亦然

B. 四珠環形成的四個弧的圓心角度和＝$45°\times 4=180°$。

C. 用餘弦定理求圓半徑$\overline{EF}=$

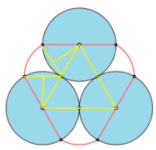
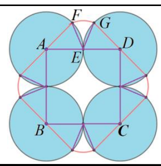
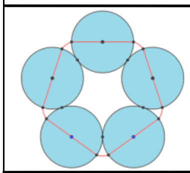
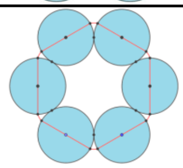
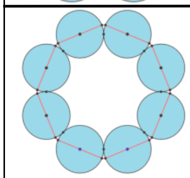
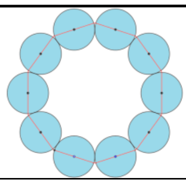
$$\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{AF}^2-2\overline{AE}\cdot\overline{AF}\cdot\cos(\angle FAE)}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot cos45°}$$

D. 圓弧總長$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot cos45°}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\pi\approx 1.202$

E. 釣魚線最短長度：$4+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\pi\approx 5.202$

F. 所以串出立方體需要$6\left(4+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\pi\right)+$打結處$\approx 31.213+10\approx 42$(公分)

由上可得其他珠環的最短長度

珠環數	最短長度(不含打結處)單位：cm	珠環數	最短長度(不含打結處)單位：cm
	$3+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot cos60°}\approx 4.571$		$4+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\approx 5.202$
	$5+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot cos36°}\approx 5.971$		$6+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot cos30°}$ ≈ 6.813
	$8+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot cos22.5°}\approx 8.613$		$10+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot cos18°}$ ≈ 10.49

接著我們可以算出串珠串出多面體的釣魚線需要的最短長度，不包含打結處 10cm

名稱		面	最短長度(不含打結處) 單位：cm
正多面體	正立方體 (截半立方體)	正方形x6	$6\left(4+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)\approx31.213$
	正八面體	三角形x4 三角形x4	$4\left(3+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos60°}\right)\approx18.2$
	正十二面體 (截半二十面體)	五邊形x12	$12\left(5+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos36°}\right)\approx71.65$
阿基米德多面體	截角四面體	三角形x4 六邊形x4	$4\left(6+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos30°}\right)\approx27.25$
	截角立方體	三角形x8 八邊形x6	$6\left(8+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos22.5°}\right)\approx51.677$
	截角八面體	正方形x6 六邊形x8	$8\left(6+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos30°}\right)\approx54.50$
	截角十二面體	三角形x20 十邊形x12	$12\left(10+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos18°}\right)\approx125.90$
	截角二十面體	五邊形x12 六邊形x20	$12\left(5+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos36°}\right)+20\left(6+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos30°}\right)\approx207.9$

	小斜方截半立方體	三角形×8 正方形×12 正方形×6	$8\left(3+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 60^\circ}\right)+6\left(4+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)$ ≈ 67.78
	大斜方截半立方體	正方形×12 六邊形×8 八邊形×6	$8\left(6+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 30^\circ}\right)+6\left(8+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 22.5^\circ}\right)$ ≈ 168.61
	小斜方截半二十面體	三角形x20 正方形x30 五邊形x12	$30\left(4+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)\approx 156.07$
	大斜方截半二十面體	正方形x30 六邊形x20 十邊形x12	$30\left(4+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)+20\left(6+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 30^\circ}\right)+$ $12\left(10+\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 18^\circ}\right)\approx 418.2$

上方表格中的紅色字體表示在串珠過程中會因滿足一筆畫原則而自動出現的形狀，這些通通是出現在**串點的多面體**上。其中「小斜方截半二十面體」因為是串出 30 個正方形而自動出現五邊形與三角形，故這顆成品其實很容易變形。

串邊的多面體便是看多面體有多少面，利用珠環的最短長度下去累加的結果。其中「大斜方截半二十面體」因為需串十珠環，故擺放時也較容易變形。

五、結論與生活應用

(一)結論

1.串邊會在面之間形成三角形

2. 具有偶數點的多面體(串點)皆可被串出

3.分類為奇數點中的柏拉圖多面體皆為串邊

4.多面體的一筆畫和一筆畫定理的確有關連(偶數點的部分)，但對於多面體而言，奇數點只會影響其串的方式，形成一筆畫的成敗並不全取決於它，仍有其它變因(是否為正多面體或有無三角形)

(二)應用

1.碳六十(富勒烯)其結構為截角二十面體，許多化學結構也可以用串珠呈現。

2.串珠是一種藝術，可做珠寶或其他裝飾品，為了作品的穩定，每面的珠環不宜超過 7 個。

3.多面體可應用在模型、積木和雕塑

4. 透過串珠實作，可以幫助我們建構空間概念。

參考資料

1. 中央大學科學教育中心實驗頻道。**七橋問題 Seven Bridges Problem**。2020 年 12 月 10 日取自：https://www.youtube.com/watch?v=iswTdr6HxzQ
2. 洪明譽(2020)。**動手玩數學**，頁 32-42。台南市：南一書局。
3. 黃湘樺、黃馨儀(2009)。**「珠」絲馬跡-串珠與數學原理之探討**。中華民國第 49 屆中小學科學展覽。取自網址：https://www.ntsec.edu.tw/FileAtt.ashx?id=4838
4. 林保平(2018)。多面體的生成及動態模型製作在數學算板上的實踐(下)，**科學教育月刊，413**，p10-22。取自：https://reurl.cc/o9X3rv
5. 維基百科。https://reurl.cc/o9X35v