

【2021 全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

教師組 教案表單與學習單

教案設計者：何敏華
課程領域：
<input type="checkbox"/> 物理 <input type="checkbox"/> 化學 <input type="checkbox"/> 生物 <input type="checkbox"/> 地球科學 <input checked="" type="checkbox"/> 科技領域 <input checked="" type="checkbox"/> 其他 <u>數學</u>
教案題目：驚覺遲到前的奇妙時鐘 ~ Fibonacci Clock
授課時數：3 節課(50 分/節)
教育對象：高中一年級
教案設計理念與動機：
<p>數學課程也可以有探究與實作嗎？數學概念也可以透過觀察、模擬、猜想與實驗來建立嗎？答案是可行的。或許數學不像自然科學在操作、控制變因下，可以觀察到不同的結果與解釋不同的情境，因為數學往往都是在計算、演譯不變的定理、本質，並將科學現象作更精準的表徵與論證。然而殊不知存在自然界中序列、規律卻是常常可以觀察到的數學之美，費波那契數列就是其中一個令人驚喜的例子，建築比例、花瓣的生長、螺紋的曲線、颱風形成軌跡等都有它的身影，就如 19 世紀末，繼高斯後法國具全面知識的數學家亨利 龐加萊曾說過：『詩歌是以不同的名字稱呼相同事物的藝術，而數學則是以相同的名字稱呼不同事物的藝術』。本教案即是作者從一個費波那契時鐘的 APP 得到的靈感，時鐘的特色是『解讀時間不容易』、『當你讀出時間時，時間已過了』，一個這麼有趣奇妙的時鐘，想必學生一定也很感興趣。</p> <p>本課程設計的探究、實作歷程是以『問題-過程-解答-延伸』為整體的程序(課程架構如下圖)，從費波那契時鐘顏色變化的問題開始，再經由教師所設計的數位化費氏時鐘與鷹架式學習單的提問過程，學生進行猜測、模擬實驗，進而建構或解答出自己的邏輯思維判斷或演算方式，最後學生再以設計一個比顏色變化再多一些功能的數位費氏時鐘作為評量(例如學生將時間改為的 24 小時制、多了星期或上下弦月的變化)，在創意的延伸上，學生也利用費波那契數列設計加法器、球賽計分器、猜數字遊戲等。教師同時介紹與其他團隊共同開發的實體費氏時鐘，讓學生可以看到此裝置在 AIOT 的未來應用，並認知到數學的邏輯演算與程式設計是相當重要的能力培養。</p>


教學目標：

認知：(1)理解費波那契數列應用在小時/分鐘的演算法。

(2)理解費波那契時鐘設計的布林邏輯判斷。

情意：(1)欣賞大自然界中費波那契數列的巧妙存在。

(2)觀賞國外有關費波那契時鐘在外觀、擴展版、IOT 的設計歷程，與公開募資平台的展現應用。

技能：(1)利用動態數學軟體 GeoGebra 完成費波那契時鐘的數位化建模。

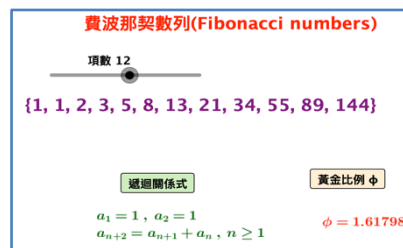
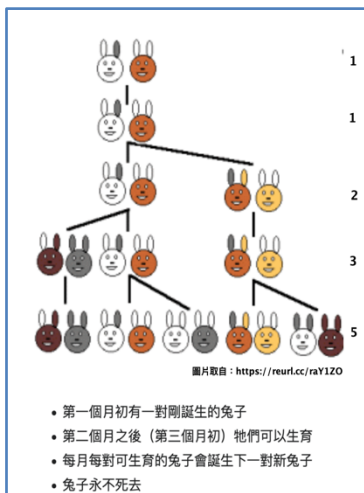
(2)費波那契時鐘延伸功能的創作與設計。

課程設計（方法與步驟）：

壹、觀察與探究

一、引起動機

1. 介紹義大利數學家 Leonardo Fibonacci 在「計算之書」所提出的兔子生長數目問題所衍生的費波那契數列。(教師自製簡報影片，連結為參考資料一)
2. 欣賞影片，介紹自然界所存在的費波那契數列與黃金比值：The magic of Fibonacci Sequence in Natural (取自 <https://youtu.be/nt2OIMAJ6o>)



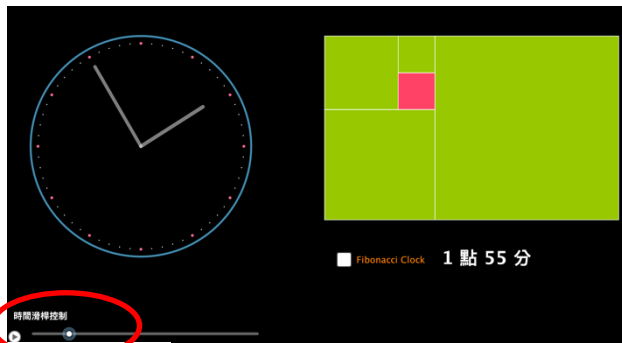
二、觀察、探究數位費波那契數時鐘的變化

1. 從藝術裝置的角度作概略性觀察：

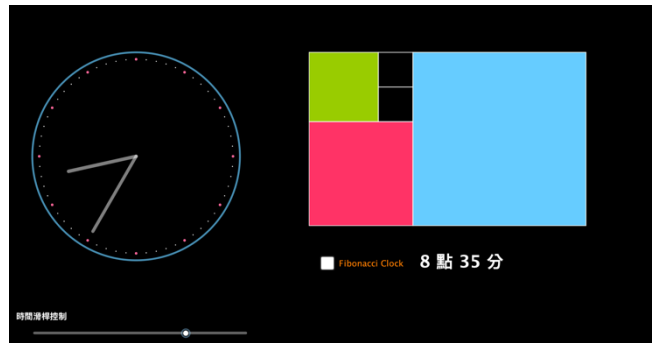
教師介紹費氏數列前五項{1,1,2,3,5}所製作的費氏矩形，並藉由設計符合學生觀察的數位化費波那契數時鐘(簡稱費氏時鐘)進行 Demo，讓學生從一個動態色彩的藝術裝置觀察起，探究費氏時鐘在色彩變化上的概略現象。

2. 調整時間滑桿作參數變化的探究：

在數位化費氏時鐘的 Demo 中，學生可自行調整時間的參數滑桿，探究色彩變化的間距、小時/分鐘對色彩變化的影響。



時間參數滑桿



三、學生表現

1. 大部分學生能觀察出：『紅、藍、綠』三種顏色在費氏矩形中不停變換→色彩變化的間距為 5 分鐘。
2. 透過時間參數滑桿的控制，大部分學生亦能探究出費氏矩形{1,1,2,3,5}個別會出現顏色時，與小時/分鐘的數字有關係。
3. 無法探究出顏色配置與小時/分鐘的相關性。



【學生表現】

方格全加起來為 12，有 1、2、3、5 的方格，可以湊出相加為 1~12 的方格，所以可以表示 1~12

小時：1~12*5 分鐘↵

每個圖形的邊全部加起來為 12↵

運用這個邏輯讓時間可以跟著圖形跑↵

小時最多可以到 12 小時，分鐘只能是 5 的倍數↵

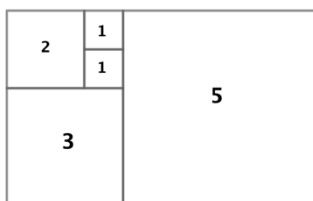
$1+1+2+3+5=12, 60/5=12$ 利用顏色來表示小時，但在表示分鐘時只能是 5 的倍數。

所需數大於 5 時將邊長 5 的正方形填滿，再將差數用其餘正方形填滿補齊↵

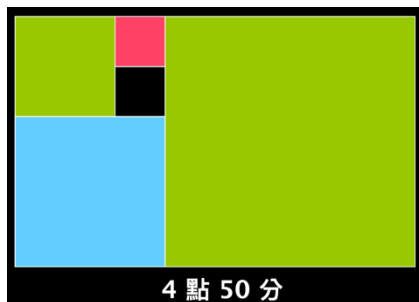
貳、數位化模擬與實驗

一、解讀費氏時鐘

1. 教師經過探索階段中的學生表現，在形成性評量中以『鷹架學習』的提問教學法，引導學生針對單一顏色「紅、綠、藍」的逐步觀察與討論，期待學生解讀出正確的奇妙時鐘。
2. 教師講解如何解讀費氏時鐘：
 - (1)以費氏數列的前五項當正方形邊長，逐步繪出費氏矩形，且每塊正方形以 1,1,2,3,5 來代表。
 - (2)小時的解讀→紅色與藍色的數字和、分鐘的解讀→綠色與藍色的數字和。



藍 + 紅 → 小時
(藍 + 綠) × 5 → 分鐘



二、鷹架式提問學習的模擬、實驗

1. 教師設計數位化費氏時鐘的測試版，讓學生藉由完成鷹架式提問的學習單，能進一步從不同向度理解費氏時鐘設計背後的演算法與邏輯原理。

2. 鷹架式學習單提問：

(1) 提問 1: 『將費波納契矩形依時間鈕產生的時間，塗上正確的顏色。(完成 3 個時間並截圖)』
透過時間的亂數產生鈕，學生依解讀費氏時鐘的原則，將顏色配置到正確的位置。過程中，學生必須建構小時的陣列、分鐘的陣列，並因費氏數列分配的衝突配置發生，進而會以顏色的配置來輔助解決，因此能建立交集的邏輯運算思維與自己的演算方式。

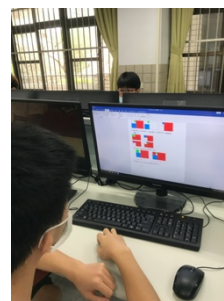
例如：11 點 35 分時，若小時陣列為{5,3,2,1}，分鐘化成 5 分制陣列為{5,2}，那麼 5、2 的正方形同時須被小時與分鐘使用，這種認知衝突的發生能進而建構『交集的產生需配置藍色』的邏輯思維。

第 1 題 (1)請將費波納契矩形依時間鈕產生的時間，塗上正確的顏色。(完成 3 個時間並截圖)

第 2 題

第 3 題

時間鈕 7 點 15 分

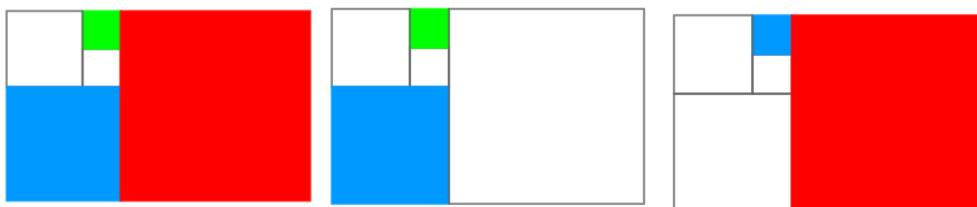


【學生表現】

時間鈕 8 點 20 分

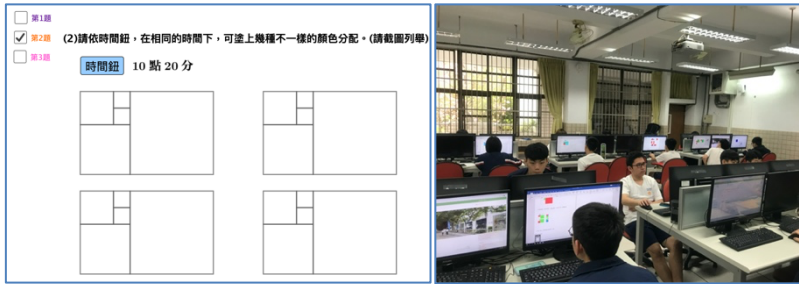
時間鈕 3 點 20 分

時間鈕 6 點 5 分

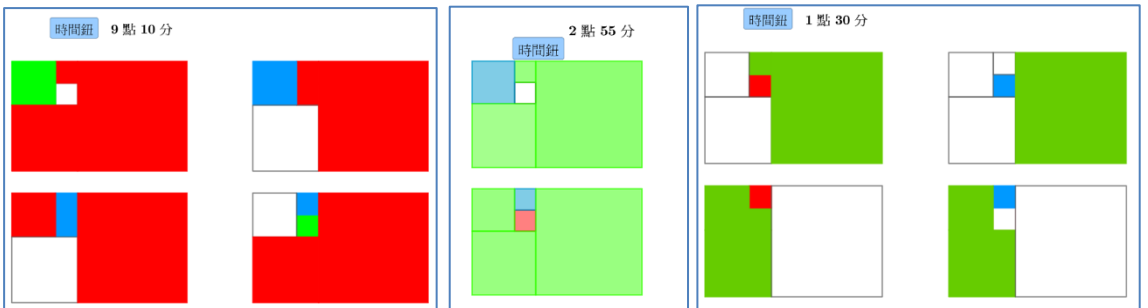


(2) 提問 2: 『請依時間鈕，在相同的時間下，可塗上幾種不一樣的顏色分配。(請截圖列舉)』
經由提問 1，學生應會面臨到建立小時與分鐘陣列時的會有多種的可能情況，進而會產生顏色配置的不同組合。此題讓學生嘗試模擬創建有較(最)多種可能位置、顏色的時間變數，以培養學生經由實驗體驗、經歷到多種結果產生的條件與變因。

例如：8 點 35 分時，小時陣列可為{5,3}、{5,2,1}、{5,2,1(另一個正方形的 1)}或{3,2,1,1}，分鐘化成 5 分制陣列可為{5,2}、{5,1,1}或{3,2,1,1}，就不同的組合陣列與陣列中不同數字的位置排列，即可創造出不同樣貌的顏色變化。



【學生表現】



未來延伸

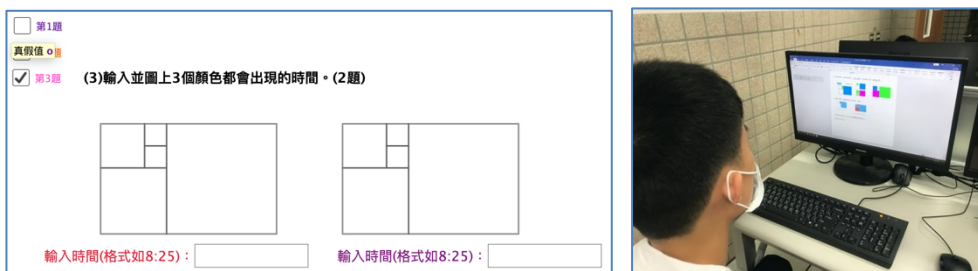
若有充沛的教學時間，可進一步讓學生探討以下議題：

- (1)費氏時鐘可能出現顏色的排列組合情形。
- (2)若有多種色彩組合時，相臨不同色的情況有幾種。

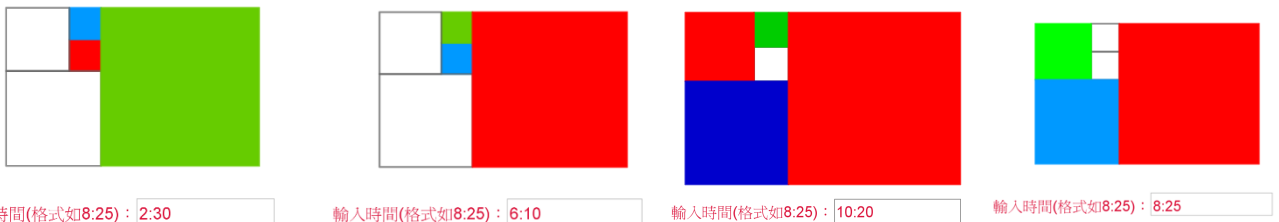
(3)提問 3: 『輸入並圖上 3 個顏色都會出現的時間。』

本提問希望學生經過提問 1、2 的自主模擬實驗後，能迅速理解時間與顏色的分布狀況，掌握小時、時間陣列的交集對顏色配置的影響。

例如：10 點 20 分時，小時陣列中若有 ≥ 5 的元素，且分鐘陣列中若有 ≥ 4 的元素，就可以有 3 中顏色都出現。



【學生表現】



(4)提問 4: 『請寫出 Fibonacci Clock 設計的邏輯原理或演算方法。』

此提問的目的，為將探究後的心得、學習歷程聚焦於此課程核心概念的建立、發展，學生以歸納、演繹或論述的方式統整費氏時鐘背後設計原理的邏輯性或演算程序。教師分享、討論同學的學習單內容，即便有瑕疵、不清楚、無法概括所有時間的情況，但都能刺激、延伸、衍生思考探究的面向。

【學生表現】

每個圖形的邊全部加起來為 12

運用這個邏輯讓時間可以跟著圖形跑

小時最多可以到 12 小時，分鐘只能是 5 的倍數

藍色兩種都有運算到，所以小時是藍+紅，分鐘是(藍色+綠色)*5,所以藍色可以當作小時跟分鐘/5 的公倍數，作圖時可以用藍色代替綠色跟紅色重複到的部分。

第一:先將全部方格都放為綠色，再將需要的紅色數目覆蓋綠色格子，並把多餘的綠色改為無色後，將(紅色-綠色)數量的紅色格子換成藍色。

第二:先將紅色需要的方塊由大到小填滿，然後將綠色由大到小填滿，如果與紅色重疊就換為藍色。

舉個例子:所需數大於 5 時將邊長 5 的正方形填滿，再將差數用其餘正方形填滿補齊

$1+1+2+3+5=12$,為十二進位的因數,又為六十進位的因數,故藉由相加個邊長可得各數的組合

邏輯:因為 $1+1+2+3+5=12$ 又小時和分鐘都可以被 12 整除

演算方式:藍+紅=小時. (藍+綠)*5=分鐘

參、設計原理的推演

一、以『布林運算的邏輯判斷』設計數位費氏時鐘

教師以學習單中探究的脈絡講解數位費氏時鐘的設計原理，步驟說明與數位 Demo 圖示如下：

(1) 建立時間參數滑感 t ， $0 \leq t \leq 12$ ，增量為 $\frac{1}{12}$ 。

(2) 以費氏數列{1,1,2,3,5}為因子(和為 12)，建立小時的陣列(12 小時制)。將 60 分鐘除以 5 等於 12，恰可配合費氏數列何為 12，因此費氏時鐘的分鐘以 5 分鐘為顏色變化的間距，且陣列元素均以先取用大數字為原則，例如：8 小時陣列採取{5,3}，不採取{5,2,1}。

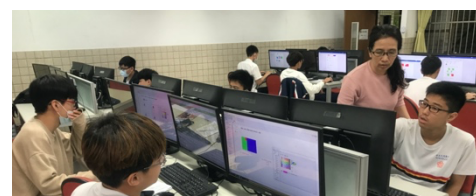
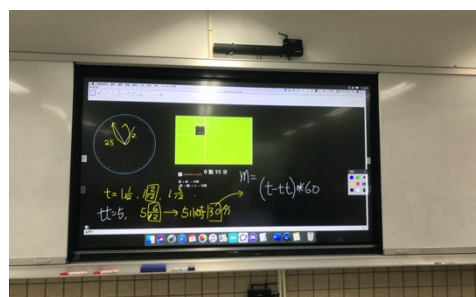
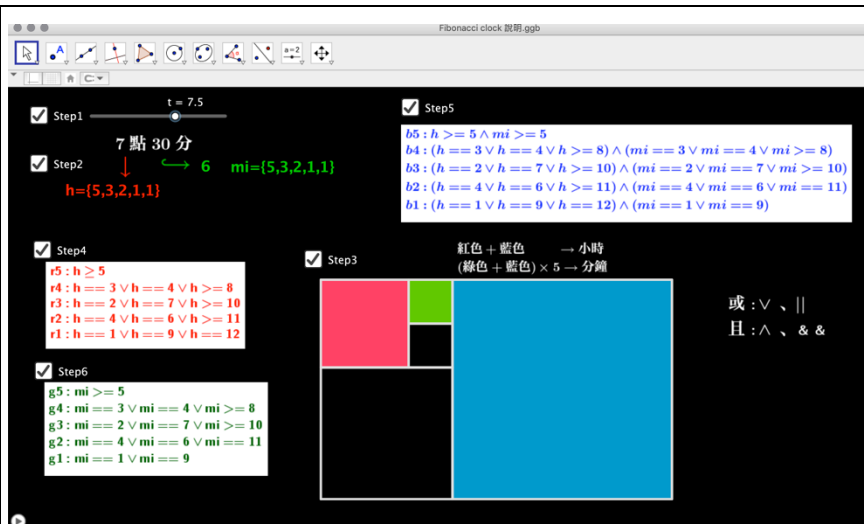
數學式的運算程序為： $h(\text{小時})=\text{floor}[t]$

$$m(\text{分鐘})=(t-h) \times 12$$

$$mi(\text{以 5 分鐘為間距})=m \div 5$$

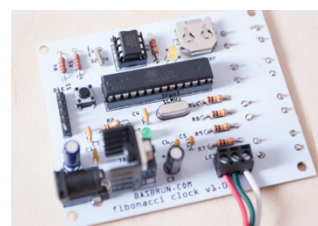
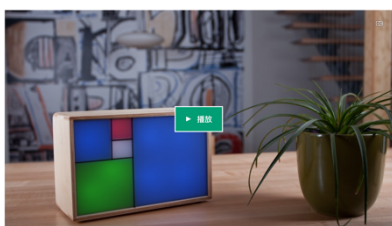
(3) 建立費氏矩形，每個以 1,1,2,3,5 為邊長的正方形都賦予 3 個名稱， $r1 \sim r5$ 代表紅色、 $g1 \sim g5$ 代表綠色、 $b1 \sim b5$ 代表藍色。

(4) 小時/分鐘陣列與顏色配置的邏輯條件，先分別思考紅色、綠色的布林條件(“或”的運算)，藍色出現的條件即為紅色與綠色條件的交集(“且”的運算)。



二、觀賞國外實作、募資費氏時鐘影片(<https://reurl.cc/raA3K4>)

本影片介紹費氏時鐘如何寫入開發版的 Python 程式碼、雷切外型裝置的過程、燈泡與接線角位設計、完成品在商店櫃台或居家裝飾應用等功能，並在平台上公開募資生產，原本總目標為加幣 5000(約 11 萬台幣)，但卻募資到約台幣 408 萬，可見一個好的創意，當它結合藝術與應用時，是能獲取大眾青睞與支持。



(圖片取自：<https://reurl.cc/2bV6e9>)

肆、費氏時鐘實體展示與 AIOT 的未來發展

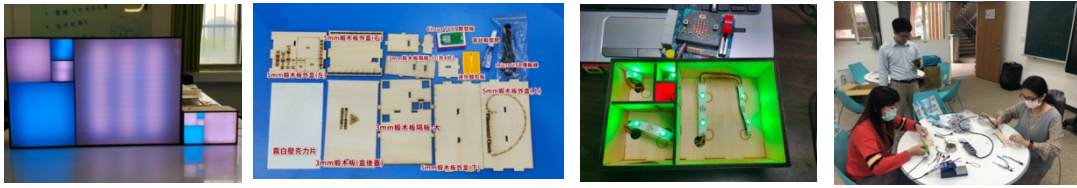
一、費氏時鐘開發產品的展示

本教案教師在設計此探究課程時，同時邀約北部新興科技中心的專案教師團隊共同研發費氏時鐘的實體裝置，同時也錄製影片、現場直播原理講解與實做課程，作為延伸應用與教學的推廣。實施此教案時，學生能實際看到費氏時鐘內部開發板的線路、燈條連接控制、外接行動電源的供電等具體器材，並如何應用 IOT，透過獲取手機 IP 來抓取目前時間呈現費氏時鐘的色彩變化，達到學生從觀察、探究、製作數位費氏時鐘模擬，到應用層面實作產出的可行性，體驗 STEAM 跨領域學習的發展。

二、實作與應用推廣

當展示此裝置時，教師讓學生討論若你擁有了這個時鐘，還會想要讓它具備什麼樣的 AI 功能？「用聲控來喚醒夜燈模式」、「用聲控來開啟霓虹燈模式」、「用環境的光影來打開啟用模式」、「多加個喇叭用紅外線遙控播放音樂」等，這些想像不就是 AIOT 的發展與應用嗎？這些想像也開啟了學生無限的好奇，他們也渴望設計出一個自己的費氏時鐘，因此，若

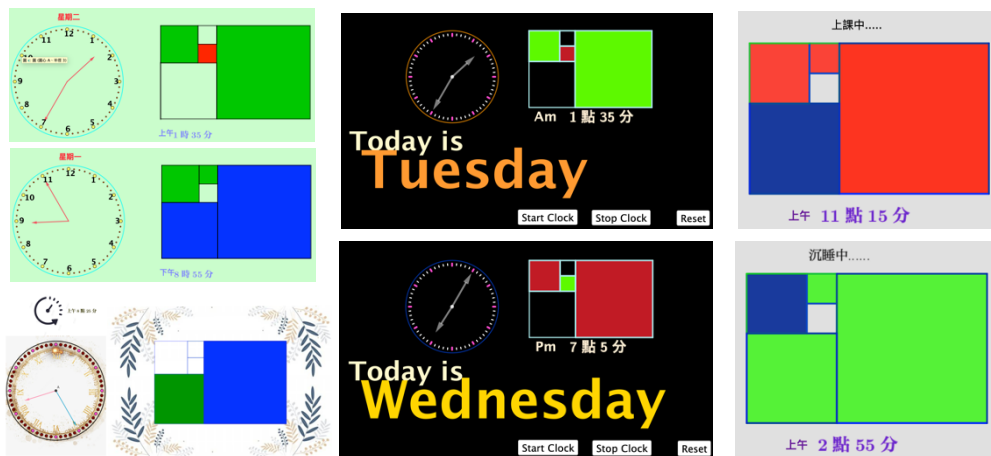
將此課程從數學的邏輯演算思維起，延伸到在生活科技、程式資訊的跨領域上，在成就每一位學生的教學目標中，實為一門有意義的探究與實作課程設計。



學習評量內容：

Fibonacci Clock 的數位建模與延伸功能設計

1. 利用動態數學軟體來延伸數位費氏時鐘的多功能設計，可以發展學生在參數關聯上的設定思考，評量出學生在數學建模上的理解，以下學生的評量表現圖示，包括了將 12 小時制的鐘面改為 24 小時制、增添週一到週日的日期變化、顯示作息情況等來豐富、延伸費氏時鐘的設計。



2. 利用費氏數列除了費氏時鐘的設計外，是否也可以有其他的創意發揮？這個評量算是沒有標準答案的作業，只要與費氏數列相關且符合邏輯觀念，即便很無厘頭、或是些微運算執行上有誤，教師都很鼓勵學生想像力的盡情發揮，也可引起同儕間鑑賞的讚美。下圖為學生表現的簡述：

螺線設計

黃金比例倉鼠

排球賽計分板

22 : 28

加法計算器

參考資料：

1. Golden Spiral https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_spiral
2. The magic of Fibonacci Sequence in Natural <https://youtu.be/nt2OIMAJ6o>
3. Fibonacci Clock-An open source clock for nerds with style <https://reurl.cc/2bV6e9>